



แผนการเรียนรู้

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช ๒๕๖๗

สาขาวิชาสามัญ-สัมพันธ์

รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒วิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

ภาคเรียนที่ ๒ ปีการศึกษา ๒๕๖๘

จัดทำโดย

นางสาวพรนิภา ศรีสวัสดิ์

สาขาวิชาสามัญ-สัมพันธ์

วิทยาลัยการอาชีพบางสะพาน

สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา

อาชีวศึกษาจังหวัดประจวบคีรีขันธ์

กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แผนการจัดการเรียนรู้ วิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม (Mathematics for Industry) รหัสวิชา 20000-1402 ท-ป-น (2-0-2) นี้มุ่งเน้นสมรรถนะและบูรณาการหลักปรัชญาของเศรษฐกิจพอเพียง ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นคู่มือประกอบการเรียนการสอนในรายวิชาเพื่อพัฒนาผู้เรียนเป็นสำคัญ ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562 สำนักงานคณะกรรมการ การอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

การจัดทำได้มีการพัฒนาเพื่อให้เหมาะสมกับผู้เรียน โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 8 หน่วยการเรียนรู้ ประกอบด้วย

- 1) อัตราส่วนตรีโกณมิติ
- 2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง
- 3) สมการตรีโกณมิติ
- 4) การประยุกต์ตรีโกณมิติ
- 5) เมทริกซ์
- 6) การคูณเมทริกซ์
- 7) ดีเทอร์มิแนนต์
- 8) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

พร้อมทั้ง แบบฝึกหัด ใบงาน แบบทดสอบพร้อมเฉลย และสื่อการเรียนการสอนต่าง ๆ เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะในสถานการณ์ต่าง ๆ มีทักษะการคิดและแก้ปัญหา และบูรณาการกับการทำงานตามสาขาอาชีพต่าง ๆ ต่อไป

ผู้จัดทำหวังว่าแผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้คงจะเป็นแนวทางและเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน และผู้สนใจทั่วไป หากมีข้อเสนอแนะประการใด ผู้จัดทำยินดีน้อมรับไว้เพื่อปรับปรุงในโอกาสต่อไป

(นางสาวพรนิภา ศรีสวัสดิ์)

สาขาวิชาสามัญ-สัมพันธ์
วิทยาลัยการอาชีพบางสะพาน

สารบัญ

คำนำ	หน้า
สารบัญ	
ลักษณะรายวิชา	๔
มาตรฐานอาชีพ (ถ้ามี)	-
หน่วยการเรียนรู้	๑๐
การวางแผนการจัดการเรียนรู้	
หน่วยที่ ๑ งาน อัตราส่วนตรีโกณมิติ	
แผนการจัดการเรียนรู้	๑๑
ใบความรู้	๑๕
แบบประเมินความสามารถในการปฏิบัติงาน/ผลลัพธ์การเรียนรู้/สมรรถนะ	๒๙
หน่วยที่ ๒ งาน พหุคูณตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง	
แผนการจัดการเรียนรู้	๓๒
ใบความรู้	๓๖
แบบประเมินความสามารถในการปฏิบัติงาน/ผลลัพธ์การเรียนรู้/สมรรถนะ	๔๙
งานสมการตรีโกณมิติ	
แผนการจัดการเรียนรู้	๕๒
ใบความรู้	๕๖
แบบประเมินความสามารถในการปฏิบัติงาน/ผลลัพธ์การเรียนรู้/สมรรถนะ	๖๔
หน่วยที่ ๔ งาน การประยุกต์ตรีโกณมิติ	
แผนการจัดการเรียนรู้	๖๗
ใบความรู้	๗๑
แบบประเมินความสามารถในการปฏิบัติงาน/ผลลัพธ์การเรียนรู้/สมรรถนะ	๗๙
หน่วยที่ ๕ งาน เมทริกซ์	
แผนการจัดการเรียนรู้	๘๓
ใบความรู้	๘๘
แบบประเมินความสามารถในการปฏิบัติงาน/ผลลัพธ์การเรียนรู้/สมรรถนะ	๙๔
หน่วยที่ ๖ งาน การคูณเมทริกซ์	
แผนการจัดการเรียนรู้	๙๗
ใบความรู้	๑๐๓
แบบประเมินความสามารถในการปฏิบัติงาน/ผลลัพธ์การเรียนรู้/สมรรถนะ	๑๐๙
หน่วยที่ ๗ งาน ดีเทอร์มิแนนต์	
แผนการจัดการเรียนรู้	๑๑๒
ใบความรู้	๑๑๙
แบบประเมินความสามารถในการปฏิบัติงาน/ผลลัพธ์การเรียนรู้/สมรรถนะ	๑๒๔
หน่วยที่ ๘ งาน การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ	
แผนการจัดการเรียนรู้	๑๒๗



ลักษณะรายวิชา
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ
สาขาวิชาสามัญ-สัมพันธ์

รหัส ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
ทฤษฎี.....๒..... ชั่วโมง/สัปดาห์ ปฏิบัติ.....๐..... ชั่วโมง/สัปดาห์ จำนวน.....๒..... หน่วยกิต

อ้างอิงมาตรฐาน

ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับรายวิชา

ประยุกต์ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการคิดวิเคราะห์การตัดสินใจแก้ปัญหาในงานอาชีพ
อุตสาหกรรม

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

๑. รู้และเข้าใจเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์ หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร

๒. มีทักษะการคิดและแก้ปัญหา การวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์ หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร

๓. มีเจตคติและกิจนิสัยที่ดีในการคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ อย่างเป็นระบบ

๔. ประยุกต์ใช้ความรู้การวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลย ของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร

สมรรถนะรายวิชา

๑. แสดงความรู้เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์ หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร

๒. คำนวณเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์ หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร ไปใช้ในสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนด

๓. คิดและแก้ปัญหาเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์ หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร ไปใช้ในสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนด

๔. ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลม หนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร ไปใช้ในสถานการณ์หรือปัญหา ที่กำหนดไปใช้ในงานอาชีพ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาและฝึกทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และการใช้ดีเทอร์

มีแนวคิดหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร และการประยุกต์ใช้ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการคิดวิเคราะห์ การตัดสินใจแก้ปัญหาในงานอาชีพอุตสาหกรรม



ตารางวิเคราะห์หน่วยการเรียนรู้

ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับรายวิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม ประยุกต์ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการคิดวิเคราะห์การตัดสินใจแก้ปัญหาในงานอาชีพ อุตสาหกรรม				
งานหลัก	งานย่อย	สมรรถนะย่อย (มาตรฐานอาชีพ)	ความรู้ ในการปฏิบัติงาน	ทักษะ ในการปฏิบัติงาน
งานหลัก ๑	๑.บอกจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชาตาม หลักสูตรฯ ได้ ๒.บอกแนวทาง วัดผลและการ ประเมินผลการ เรียนรู้ได้		๑.รู้และเข้าใจ เกี่ยวกับ มุม และการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลม หนึ่งหน่วย กฎของ ไซน์ กฎของโคไซน์ เมท ริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่ เกินอันดับสาม ๒.มีทักษะกระบวนการ คิดและแก้ปัญหา เกี่ยวกับมุมและการวัด มุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลม หนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกิน อันดับสาม และนำไป ประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ ๓.มีเจตคติและกิจนิสัยที่ ดีในการคิด วิเคราะห์ แก้ปัญหาในสถานการณ์ ต่างๆ อย่างเป็นระบบ และมีความละเอียด รอบคอบในการ ปฏิบัติงาน	๑ .มี การพั ฒ นา คุณธรรม จริยธรรม ค ่า นี ย ม และ คุณลักษณะอันพึง ประสงค์ของผู้สำเร็จ การศึกษา
งานหลัก ๒	๑.หาค่าฟังก์ชัน ตรีโกณมิติจาก เงื่อนไขที่กำหนด		๑.บอกความหมายของ วงกลมหนึ่งหน่วยได้	๑ .มี การพั ฒ นา คุณธรรม จริยธรรม

			๒.หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วยได้ หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจุดภาคต่าง ๆ ได้	ค ำ นี ย ม แ ล ะ คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของผู้สำเร็จการศึกษา
งานหลัก ๓	๑.ลักษณะของ สมการตรีโกณมิติ ๒.เอกลักษณ์ ตรีโกณมิติ ๓.การแก้สมการ ตรีโกณมิติ		๑.เข้าใจลักษณะของ ตรีโกณมิติและสามารถ นำไปใช้ได้ ๒.หาค่าเอกลักษณ์ ตรีโกณมิติได้ ๓.สามารถแก้สมการ ตรีโกณมิติได้	๑ .มี การพั ฒ นา คุณธรรม จริยธรรม ค ำ นี ย ม แ ล ะ คุณลักษณะอันพึง ประสงค์ของผู้สำเร็จ การศึกษา
งานหลัก ๔	๑.กฎของไซน์		๑.หาความยาวของด้าน หรือขนาดมุมของรูป สามเหลี่ยมใด ๆ โดยใช้ กฎของไซน์ ๒.นำกฎของไซน์ไปใช้ในการ แก้ปัญหาได้	๑ .มี การพั ฒ นา คุณธรรม จริยธรรม ค ำ นี ย ม แ ล ะ คุณลักษณะอันพึง ประสงค์ของผู้สำเร็จ การศึกษา
งานหลัก ๕	๑.ความหมายและ สัญลักษณ์ของเมทริกซ์ ๒.ชนิดของเมทริกซ์	ก. ศ. น.	๑.บอกความหมายของ เมทริกซ์ได้ ๒.บอกสัญลักษณ์ของ เมทริกซ์ได้ ๓.บอกชนิดของเมทริกซ์ ได้	๑ .มี การพั ฒ นา คุณธรรม จริยธรรม ค ำ นี ย ม แ ล ะ คุณลักษณะอันพึง ประสงค์ของผู้สำเร็จ การศึกษา
งานหลัก ๖	๑.การคูณเมทริกซ์ ด้วยค่าคงตัว ๒.สมบัติการบวก ของเมทริกซ์		๑.คูณเมทริกซ์ด้วยค่าคง ตัวได้ ๒.คูณเมทริกซ์ด้วยเมท ริกซ์ได้	๑ .มี การพั ฒ นา คุณธรรม จริยธรรม

	๓.การประยุกต์ใช้ เมทริกซ์ในงาน อาชีพและ ชีวิตประจำวัน		๓.นำความรู้เรื่องเมทริกซ์ ไปประยุกต์ใช้ในงาน อาชีพและชีวิตประจำวัน ได้	ค ำ นี ย ม แ ล ะ คุณลักษณะอันพึง ประสงค์ของผู้สำเร็จ การศึกษา
งานหลัก ๗	๑.ความหมายของ ดีเทอร์มิแนนต์ และการหาค่าดี เทอร์มิแนนต์โดย วิธีการคูณทแยง ๒.การหาค่าดี เทอร์มิแนนต์โดย วิธีการกระจายโค แฟคเตอร์ ๓.สมบัติของดี เทอร์มิแนนต์		๑.บอกความหมายของดี เทอร์มิแนนต์ได้ ๒.หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยวิธีการคูณทแยงได้ ๓.หาไมเนอร์และโคแฟค เตอร์ได้ ๔.หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยวิธีการกระจายโค แฟคเตอร์ได้ ๕.นำความรู้เรื่องสมบัติ ของดีเทอร์มิแนนต์มาใช้ ในการหาค่าดีเทอร์ มิแนนต์ได้ ๖.นำความรู้เรื่องดีเทอร์ มิแนนต์ไปประยุกต์ใช้ ในงานอาชีพและ ชีวิตประจำวันได้	๑ .มี การ พั ฒ น า คุณธรรม จริยธรรม ค ำ นี ย ม แ ล ะ คุณลักษณะอันพึง ประสงค์ของผู้สำเร็จ การศึกษา

ตารางวิเคราะห์พฤติกรรมการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้	ความสามารถที่คาดหวัง								รวม	จำนวน ชั่วโมง ท/ป	
	พุทธิพิสัย						ทักษะ พิสัย	จิต พิสัย			ประยุกต์ ใช้
	ความรู้	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์	การประเมินค่า	การสร้างสรรค์					
1) อัตราส่วนตรีโกณมิติ	2	1	-	-	-	-	2	2	-	7	๐/๔
2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ มุมรอบจุดศูนย์กลาง	2	2	1	-	-	-	2	2	-	9	๐/๔
3) สมการตรีโกณมิติ	2	2	2	-	-	-	2	2	-	10	๐/๔
4) การประยุกต์ตรีโกณมิติ	2	2	2	1	-	-	2	2	-	12	๐/๔
5) เมทริกซ์	2	2	2	2	-	-	3	3	-	14	๐/๔
6) การคูณเมทริกซ์	2	2	3	2	1	๑	3	3	-	16	๐/๔
7) ดีเทอร์มิแนนต์	2	2	3	2	1		3	3	-	16	๐/๖
8) การแก้ระบบสมการเชิง เส้นโดยใช้ ดีเทอร์ มิแนนต์ และการ ประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ	2	2	3	2	1		3	3		16	๐/๖
สอบกลางภาค											
สอบปลายภาค											
รวม	๑๐	๑๐	๑๐	๑๓	๔	๓	๒๕	๒๕		๑๐๐	
ประเมินผลลัพท์การเรียนรู้ระดับรายวิชา (เมื่อเรียนรายวิชานี้สำเร็จแล้วทำอะไรได้)											
รวมทั้งรายวิชา											๓๖

หน่วยการเรียนรู้

หน่วย ที่	หน่วยการเรียนรู้	เวลาเรียน (ชม.)		
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ	รวม
๑	อัตราส่วนตรีโกณมิติ	๐	๔	๔
๒	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง	๐	๔	๔
๓	สมการตรีโกณมิติ	๐	๔	๔
๔	การประยุกต์ตรีโกณมิติ	๐	๔	๔
๕	เมทริกซ์	๐	๔	๔
๖	การคูณเมทริกซ์	๐	๔	๔
๗	ดีเทอร์มิแนนต์	๐	๖	๖
๘	การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ	๐	๖	๖
	ประเมินผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้ระดับรายวิชา	๐	๓๖	๓๖
	รวม	๐	๓๖	๓๖

การประเมินผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้ระดับรายวิชา : หลักสูตร ปวช. สัปดาห์ที่ ๑๘, หลักสูตร ปวส. สัปดาห์ที่ ๑๕

	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๑
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๑-๒
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง/งาน อัตราส่วนตรีโกณมิติ		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

1. มุมในตำแหน่งมาตรฐาน
2. หน่วยของการวัดมุม

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....-.....สมรรถนะย่อย.....-.....

๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน...-

๒) วิธีประเมิน.....-.....

๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)

๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาค่าเกี่ยวกับการวัด โดยใช้ความรู้เรื่องมุม

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. บอกหน่วยของการวัดมุมได้
2. เปลี่ยนหน่วยของการวัดมุมได้

๕. สารการเรียนรู้

๑. ความหมายของสมการ
๒. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
๓. สมบัติของการเท่ากัน

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ผู้เรียนรับฟังจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา ตามหลักสูตร ประกาศนียบัตรวิชาชีพของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา แนวทางวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ พร้อมทั้งซักถามและแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียน
2. ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนในหนังสือเรียนเพื่อวัดความรู้พื้นฐานของนักเรียน จากนั้นครูกล่าวถึง มุม

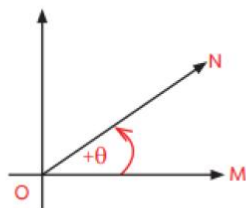
หน่วยการวัดมุม และมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไป

3. ครูและผู้เรียนพิจารณารูปโดยมุม POX เกิดจากการหมุนของสองรังสีที่มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน ด้าน OX เรียกว่า ด้านเริ่มต้น (Initial Side) ด้าน OP เรียกว่า ด้านสิ้นสุด (Terminal Side) จุด O เรียกว่า จุดมุม หรือ จุดยอด (Vertex) ขึ้นสอน



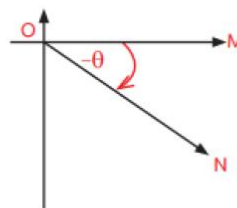
4. ครูอธิบายให้ มาตรฐาน รวมทั้งการ ผู้เรียนได้รู้เกี่ยวกับมุมในตำแหน่ง ทั้งมุมที่มีค่าบวกและค่าลบขึ้นอยู่กับการหมุนของรังสี ON ออกจากด้านที่อยู่บนแนวแกน x ทางขวา ซึ่งเรียกว่า ด้านเริ่มต้น ดังนี้ เรียกชื่อมุม มุมในตำแหน่งมาตรฐาน มี

1. ถ้ารังสี ON หมุนออกจาก ด้านเริ่มต้น OM ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ค่าของมุมจะมีค่าเป็นบวก



ON หมุนทวนเข็มนาฬิกา
ค่าของมุมจะมีค่าเป็นบวก

2. ถ้ารังสี ON หมุนออกจาก ด้านเริ่มต้น OM ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ค่าของมุมจะมีค่าเป็นลบ ดังรูป



ON หมุนตามเข็มนาฬิกา
ค่าของมุมจะมีค่าเป็นลบ

5. ครูอธิบายและสาธิตการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นองศา (degree) และเรเดียน (radian) ร่วมกับนักเรียน

การวัดมุมในระบบองศา (Degree) เป็นการวัดขนาดของมุมที่หมุนรังสีไปรอบจุด

1 องศา ($^{\circ}$)	เท่ากับ	60 ลิปดา ($'$)
1 ลิปดา	เท่ากับ	60 ฟลิปดา ($''$)
ดังนั้น 1 องศา	เท่ากับ	3,600 ฟลิปดา

ศูนย์กลาง หนึ่งรอบมีขนาดเท่ากับ 360 องศา และสามารถแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ได้อีก ดังนี้

การวัดมุมในระบบเรเดียน (Radian) เป็นการวัดขนาดของมุม θ ที่จุด ศูนย์กลางของ วงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมี r หน่วย

จงเปลี่ยนมุม $30^{\circ} 15' 20''$ ให้มีหน่วยเป็นองศา

วิธีทำ

จาก	$60'$	$=$	1°	
จะได้	$15'$	$=$	$\frac{1 \times 15}{60}$	$\approx 0.25^{\circ}$
และจาก	$3,600''$	$=$	1°	
จะได้	$20''$	$=$	$\frac{1 \times 20}{3,600}$	$\approx 0.0056^{\circ}$
ดังนั้นมุม $30^{\circ} 15' 20''$	$\approx$	$30^{\circ} + 0.25^{\circ} + 0.0056^{\circ}$		
	$\approx$	30.2556	องศา	

ตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 2

จงเปลี่ยนมุม $135^{\circ} 210'$ ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ

จาก	1°	$=$	$\frac{\pi}{180^{\circ}}$	เรเดียน
	135°	$=$	$135^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$	เรเดียน
	135°	$=$	$\frac{3\pi}{4}$	เรเดียน
	$210'$	$=$	$210' \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$	เรเดียน
	$210'$	$=$	$\frac{7\pi}{6}$	เรเดียน
ดังนั้น มุม 135° เท่ากับ $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน และ มุม $210'$ เท่ากับ $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน				

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปหน่วยของการวัดมุมและเทคนิคการเปลี่ยนมุม

ถ้าเปลี่ยนจากหน่วยองศาเป็นเรเดียนให้นำ $\frac{\pi}{180^{\circ}}$ มาคูณ

ถ้าเปลี่ยนจากหน่วยเรเดียนเป็นองศาให้นำ $\frac{180^{\circ}}{\pi}$ มาคูณ หรือแทน π ด้วย 180°

7. ผู้เรียนทำกิจกรรมใบงาน

การวัดผลและประเมินผล

ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา

๒) ทดสอบก่อนเรียน

ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ
ต่องานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม

หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานอาชีพ
๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Power
๓. กิจกรรมการเรียนการสอน
๔. รูปภาพประกอบ
๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

๘.๑ หลักฐานความรู้

๑. บันทึกการสอน
๒. ใบเช็กรายชื่อ

๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน

๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน

๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. ตรวจสอบกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้
๓. ตรวจสอบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๒ วิธีการประเมิน

๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๓ เครื่องมือประเมิน

๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา

	ใบความรู้ ที่ ๑	หน่วยที่ ... ๑
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๑-๒
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

มุมและหน่วยการวัดมุม เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาเรขาคณิต ในที่นี่จะได้กล่าวถึงมุมในตำแหน่ง มาตราฐาน ซึ่งจุดยอดมุมอยู่ที่จุดกำเนิดด้านเริ่มต้นอยู่บนแกน x ทางด้านบวก ด้านสิ้นสุดของมุมขึ้นอยู่กับทิศทางการหมุนของมุม การศึกษาเรื่องมุมเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาตรีโกณมิติ

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาค่าเกี่ยวกับการวัด โดยใช้ความรู้เรื่องมุม

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

6. บอกหน่วยของการวัดมุมได้
7. เปลี่ยนหน่วยของการวัดมุมได้

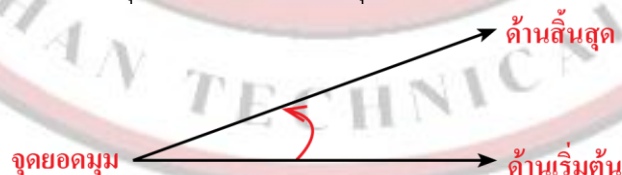
๕. เนื้อหาสาระ

ตรีโกณมิติ (Trigonometry) มีรากศัพท์มาจากคำว่า Tri หมายถึง สาม Gono หมายถึง ด้านหรือเหลี่ยม และ metry หมายถึง มิติหรือการวัด ดังนั้น ตรีโกณมิติ จึงเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณหาความยาวของด้าน หรือการวัดขนาดของมุมในรูปสามเหลี่ยม ซึ่งถือได้ว่าเป็นความรู้แขนงหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญต่อการนำไปใช้ในสาขาวิชาชีพต่าง ๆ อย่างมาก

๑. มุมและหน่วยของการวัดมุม

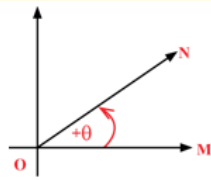
๑.๑ มุม

มุมเกิดจากการหมุนของรังสีออกจากด้านเริ่มต้น (Initial side) โดยเรียกจุดที่ด้านเริ่มต้นกับรังสีมาพบกันว่า จุดยอดมุม (Vertex) และเรียกรังสีที่หมุนออกไปว่า ด้านสิ้นสุด (Terminal side)



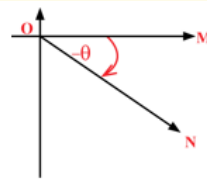
มุมในตำแหน่งมาตรฐาน มีทั้งมุมที่มีค่าบวกและค่าลบขึ้นอยู่กับทิศทางการหมุนของรังสี ON ออกจากด้านที่อยู่บนแนวแกน x ทางขวา ซึ่งเรียกว่าด้านเริ่มต้น ดังนี้

1. ถ้ารังสี ON หมุนออกจากด้านเริ่มต้น OM ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ค่าของมุมจะมีค่าเป็นบวก ดังรูป



ON หมุนทวนเข็มนาฬิกา ค่าของมุมจะมีค่าเป็นบวก

2. ถ้ารังสี ON หมุนออกจากด้านเริ่มต้น OM ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ค่าของมุมจะมีค่าเป็นลบ ดังรูป



ON หมุนตามเข็มนาฬิกา ค่าของมุมจะมีค่าเป็นลบ

๑. ๒ หน่วยของการวัดมุม



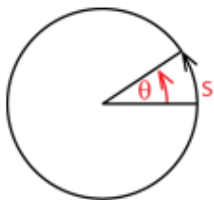
๑. การวัดมุมในระบบองศา

การวัดมุมในระบบองศา (Degree) เป็นการวัดขนาดของมุมที่หมุนรังสีไปรอบจุดศูนย์กลางหนึ่งรอบมีขนาดเท่ากับ 360 องศา และสามารถแบ่งออกเป็นหน่วยย่อยๆ ได้อีก ดังนี้

1 องศา (°)	เท่ากับ 60	ลิปดา (')
1 ลิปดา	เท่ากับ 60	ฟิลิปดา (")
ดังนั้น 1 องศา	เท่ากับ 3,600	ฟิลิปดา



๒. การวัดมุมในระบบเรเดียน



การวัดมุมในระบบเรเดียน (Radian) เป็นการวัดขนาดของมุม θ ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมี r หน่วย
จากรูปจะได้รับความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุม θ เรเดียน ความยาวรัศมี r หน่วย และความยาวส่วนโค้ง s หน่วย ดังนี้



$$\begin{aligned} \text{ขนาดของมุม } (\theta) &= \frac{\text{ความยาวส่วนโค้ง } (s)}{\text{ความยาวรัศมี } (r)} && \text{หน่วยเป็นเรเดียน} \\ \text{มุมรอบจุดศูนย์กลาง} &= \frac{\text{ความยาวเส้นรอบวง}}{\text{ความยาวรัศมี}} \end{aligned}$$

ดังนั้น 360 องศา $= \frac{2\pi r}{r}$
 1 องศา $= \frac{2\pi}{360}$
 1 องศา $= \frac{\pi}{180}$ เรเดียน
 และ 2π เรเดียน $= 360$ องศา
 1 เรเดียน $= \frac{360}{2\pi}$
 1 เรเดียน $= \frac{180}{\pi}$ เรเดียน

ข้อคว่อ่า

360 องศา $= 2\pi$ เรเดียน
 180 องศา $= \pi$ เรเดียน



ตัวอย่าง

จงเปลี่ยนมุม $30^\circ 15' 20''$ ให้มีหน่วยเป็นองศา

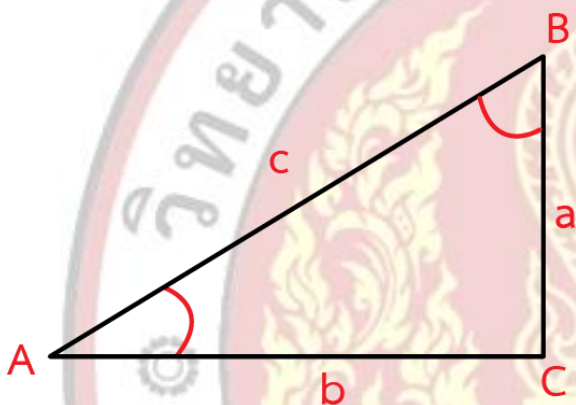
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{จาก } 60' &= 1^\circ \\ \text{จะได้ } 15' &= \frac{1 \times 15}{60} = 0.25^\circ \\ \text{และจาก } 3,600'' &= 1^\circ \\ \text{จะได้ } 20'' &= \frac{1 \times 20}{3,600} \approx 0.0056^\circ \\ \text{ดังนั้น มุม } 30^\circ 15' 20'' &\approx 30^\circ + 0.25^\circ + 0.0056^\circ \\ &\approx 30.2556 \text{ องศา} \end{aligned}$$

จงเปลี่ยนมุม 135° และ 210° ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ	จาก	$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$	เรเดียน
		$135^\circ = 135^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$	เรเดียน
		$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	เรเดียน
		$210^\circ = 210^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$	เรเดียน
		$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	เรเดียน
ดังนั้น มุม 135° เท่ากับ $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน และ มุม 210° เท่ากับ $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน			

๒. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก
 มีด้าน a แทน ความยาวของด้านตรงข้ามกับมุม A
 มีด้าน b แทน ความยาวของด้านตรงข้ามกับมุม B
 มีด้าน c แทน ความยาวของด้านตรงข้ามกับมุม C



เทคนิคการเปลี่ยนมุม

1. ถ้าเปลี่ยนจากหน่วยองศาเป็นเรเดียนให้นำ $\frac{\pi}{180^\circ}$ มาคูณ

ถ้ากำหนดให้ 2. A เป็นมุมหลัก จะเรียกเรเดียนเป็นองศาให้นำ $\frac{180^\circ}{\pi}$ มาคูณ หรือแทน π ด้วย 180°

ด้าน a ว่า ด้านตรงข้ามมุม A (Opposite Side)

ด้าน b ว่า ด้านประชิดมุม A (Adjacent Side)

ด้าน c ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก (Hypotenuse)

ในทำนองเดียวกัน

ถ้ากำหนดให้มุม B เป็นมุมหลัก จะเรียก

ด้าน b ว่า ด้านตรงข้ามมุม B อาจเรียกสั้น ๆ ว่า ข้าม

ด้าน a ว่า ด้านประชิดมุม B อาจเรียกสั้น ๆ ว่า ชิด

ด้าน c ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก อาจเรียกสั้น ๆ ว่า ฉาก

อัตราส่วนของความยาวด้าน 2 ด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะเรียกว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งมีทั้งหมด 6 อัตราส่วน ดังนี้

เมื่อกำหนดให้มุม A เป็นมุมหลัก

$$1. \sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \text{ เขียนแทนด้วย } \frac{a}{c}$$

$$2. \quad \cosine A = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \quad \text{เขียนแทนด้วย } \frac{b}{c}$$

$$3. \quad \text{tangent } A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A} \quad \text{เขียนแทนด้วย } \frac{a}{b}$$

และมีอีกสามอัตราส่วนที่เป็นส่วนกลับของสามอัตราส่วนแรก ดังนี้

$$4. \quad \text{cosecant } A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A} \quad \text{เขียนแทนด้วย } \frac{c}{a}$$

$$5. \quad \text{secant } A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A} \quad \text{เขียนแทนด้วย } \frac{c}{b}$$

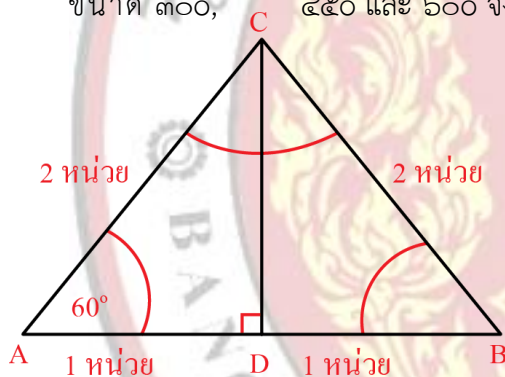
$$6. \quad \text{cotangent } A = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A} \quad \text{เขียนแทนด้วย } \frac{b}{a}$$

เพื่อความสะดวกต่อการใช้ในกรณีทั่วไป อาจแบ่งฟังก์ชันตรีโกณมิติออกเป็น 2 กลุ่ม ได้ดังนี้

อัตราส่วนตรีโกณมิติกลุ่มหลัก	อัตราส่วนตรีโกณมิติกลุ่มตรงข้าม
1 $\sin \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	1 $\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}$
2 $\cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	2 $\sec \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$
3 $\tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$	3 $\cot \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}$

๓. การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม ๓๐๐, ๔๕๐ และ ๖๐๐

อัตราส่วนตรีโกณมิติสามารถหาค่าได้หลายวิธี แต่ในชีวิตประจำวันมีมุมที่เราใช้เป็นประจำ ได้แก่ มุมที่มีขนาด ๓๐๐, ๔๕๐ และ ๖๐๐ จึงควรทราบค่าของมุมเหล่านี้ เพื่อใช้ในการคำนวณได้รวดเร็วขึ้น



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC สามารถหาความยาวด้าน CD จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

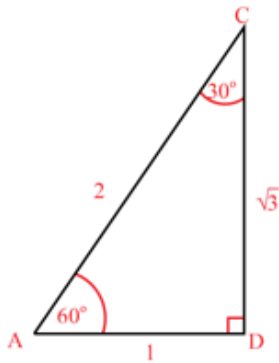
$$AC^2 = CD^2 + AD^2$$

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$

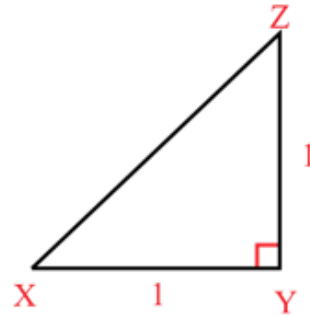
$$CD = \sqrt{2^2 - 1^2}$$

$$CD = \sqrt{3}$$

ดังนั้น อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60° สามารถหาได้จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



และอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 45° สามารถหาได้จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



พิจารณารูปสามเหลี่ยม XYZ สามารถหาความยาวด้าน XZ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$XZ^2 = XY^2 + YZ^2$$

$$XZ = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$XZ = \sqrt{2}$$

๖. |

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ขึ้นหน้าใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ฯ)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๑	หน่วยที่ ... ๑
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๑-๒
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ		

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๑ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ ๑

1. ตอบ ง.

วิธีทำ จาก 1 องศา $= \frac{2\pi}{360^\circ}$

$$150 \text{ องศา} = 150^\circ \times \frac{2\pi}{360^\circ}$$

$$= \frac{5\pi}{6}$$

ดังนั้น มุม 150 องศา เท่ากับ $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน

2. ตอบ ข.

วิธีทำ จาก 1 เรเดียน $= \frac{180^\circ}{\pi}$

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= 210 \text{ องศา}$$

ดังนั้น มุม $\frac{7\pi}{6}$ องศา เท่ากับ 210 องศา

3. ตอบ ก.

วิธีทำ มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180°

นั่นคือ $A + B + C = 180^\circ$ (จากโจทย์ $A = B$)

$$2A + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 45^\circ$$

จาก $\tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$

$$\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{20}{\overline{AC}}$$

$$1 = \frac{20}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AC} = 20$$

ดังนั้น ความยาวด้าน AC เท่ากับ 20 เมตร

4. ตอบ ก.

วิธีทำ จาก $\cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$$\cos C = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}$$

$$\text{จาก } \cos C = \frac{6}{10}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{6}{10}$$

$$\text{นั่นคือ } \overline{EC} = 6 \quad \text{และ} \quad \overline{DC} = 6$$

$$\overline{DC}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{DE}^2$$

$$10^2 = 6^2 + \overline{DE}^2$$

$$\overline{DE}^2 = 100 - 36$$

$$\overline{DE}^2 = 64$$

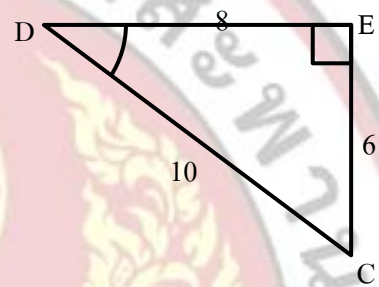
$$\overline{DE} = 8$$

$$\text{ดังนั้น } \sin^2 + 1 = \left(\frac{6}{10}\right)^2 + 1$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{9}{25} + 1$$

$$= 1.36$$



5. ตอบ ก.

$$\text{วิธีทำ } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ข้อ ก. เรียงค่าได้ถูกต้อง

6. ตอบ ข.

วิธีทำ $\tan^2 45^\circ + 2 \sin 30^\circ = (1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\tan^2 45^\circ + 2 \sin 30^\circ = 2$

7. ตอบ ก.

วิธีทำ จากรูป $\tan C = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$

จะได้ $\tan 45^\circ = \frac{\overline{AB}}{10}$

$$1 = \frac{\overline{AB}}{10}$$

$$\overline{AB} = 10$$

ดังนั้น แม่น้ำกว้าง 10 เมตร

8. ตอบ ก.

วิธีทำ จากรูป $\tan B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{AC}}{5}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\overline{AC}}{5}$$

$$\overline{AC} = 5\sqrt{3}$$

ดังนั้น เสาสูง $5\sqrt{3}$ เมตร

9. ตอบ ข.

วิธีทำ จากตารางจะได้ว่า

$$\tan 25^\circ = 0.4663$$

10. ตอบ ง.

วิธีทำ จากตารางจะได้ว่า

$$\tan 1.1345 \text{ เรเดียน เท่ากับ } 2.1445$$

เฉลย แบบฝึกทักษะที่ 1

1. วิธีทำ จาก $60' = 1^\circ$

จะได้ $10' = \frac{1^\circ \times 10}{60}$

$$\approx 0.167$$

และจาก $3,600'' = 1^\circ$

จะได้ $48'' = \frac{1^\circ \times 48}{3,600}$

$\approx 0.0133^\circ$

ดังนั้น $25^\circ 10' 48'' \approx 25^\circ + 0.167^\circ + 0.0133^\circ$

$25^\circ 10' 48'' \approx 25.1803^\circ$

2. วิธีทำ จาก $1^\circ = 60'$

จะได้ $0.555^\circ = 0.555^\circ \times 60'$

$= 33.3'$

และจาก $1' = 60''$

จะได้ $0.3' = 3' \times 60''$

$= 18''$

ดังนั้น $5.555^\circ = 5^\circ 33' 18''$

3. 1) 120°

วิธีทำ จาก $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$

จะได้ $120^\circ = 120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$

$= \frac{2\pi}{3}$

ดังนั้น $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ เรเดียน

2) 300°

วิธีทำ จาก $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$

จะได้ $300^\circ = 300^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$

$= \frac{5\pi}{3}$

ดังนั้น $300^\circ = \frac{5\pi}{3}$ เรเดียน

3) 300°

วิธีทำ จาก $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$
 จะได้ $450^\circ = 450^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$
 $= \frac{5\pi}{2}$

ดังนั้น $450^\circ = \frac{5\pi}{2}$ เรเดียน

4. 1) $\frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ จาก 1 เรเดียน $= \frac{180^\circ}{\pi}$
 จะได้ $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi}$
 $= 150^\circ$

ดังนั้น $\frac{5\pi}{6} = 120$ องศา

2) $\frac{9\pi}{10}$

วิธีทำ จาก 1 เรเดียน $= \frac{180^\circ}{\pi}$
 จะได้ $\frac{9\pi}{10} = \frac{9\pi}{10} \times \frac{180^\circ}{\pi}$
 $= 162^\circ$

ดังนั้น $\frac{9\pi}{10} = 162$ องศา

3) $\frac{3\pi}{4}$

วิธีทำ จาก 1 เรเดียน $= \frac{180^\circ}{\pi}$
 จะได้ $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi}$
 $= 135^\circ$

ดังนั้น $\frac{3\pi}{4} = 135$ องศา

4) $\frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ จาก 1 เรเดียน $= \frac{180^\circ}{\pi}$
 จะได้ $\frac{11\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi}$

$$= 165^\circ$$

ดังนั้น $\frac{11\pi}{12} = 165$ องศา

5) $\frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $1 \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{\pi}$

จะได้ $\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi}$
 $= 300^\circ$

ดังนั้น $\frac{5\pi}{3} = 300$ องศา

5. วิธีทำ

$$\sin x = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\cos x = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\tan x = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

$$\sec x = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

$$\cot x = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\sin y = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\cos y = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\tan y = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec} y = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

$$\sec y = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

$$\cot y = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

6. วิธีทำ

จากรูป $\sin A = \frac{a}{c}$

$$= \frac{9}{15}$$

และจาก $c^2 = a^2 + b^2$

จะได้ $15^2 = 9^2 + b^2$

$$b^2 = 225 - 81$$

$$b^2 = 144$$

$$b = 12$$

ดังนั้น $\sin A = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

และ $\operatorname{cosec} A = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$



แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง
 โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำจริงจั่งต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จักฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ ทรัพย์สินสิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชี รายรับ-รายจ่ายของตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อ วิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช้เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและ ปฏิบัติเต็มที่ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและ กาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกัน ยังคงมีความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อม ถูกต้องตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกาย ใจและ สภาพแวดล้อม มีความผ่องใสเป็นที่เจริญตาแก่ผู้พบเห็น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของ ผู้อื่น รับผิดชอบต่อตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวม พลังช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและจัดการความ ขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมทั้งจะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มี ความเดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วม สร้างสรรค์สิ่งดีงามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ			
28-30 คะแนน =	ดีมาก	15-19 คะแนน =	ควรปรับปรุง
25-27 คะแนน =	ดี	0-14 คะแนน =	ใช้ไม่ได้
20-24 คะแนน =	พอใช้		

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
	๕	๔	๓	๒	๑
๑.ผลการเรียนที่คาดหวังมีความชัดเจน ครอบคลุมพฤติกรรมทุกด้าน (KAP)					
๒.เนื้อหาสาระมีความถูกต้อง ครอบคลุม และชัดเจน					
๓.กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๔.กิจกรรมการเรียนรู้มีความหลากหลาย น่าสนใจและเน้นกระบวนการคิด การฟัง การพูด การอ่าน การดูและการเขียน					
๕.กิจกรรมการเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง					
๖.กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง					
๗.กิจกรรมการเรียนรู้เพียงพอที่จะส่งผลให้บรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๘.กิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดสามารถนำไปปฏิบัติการสอนได้จริง					
๙.มีสื่อที่สอดคล้องกับกิจกรรมและเป็นสื่อที่เน้นกระบวนการคิด					
๑๐.มีการวัดผลประเมินผลที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๑๑.วิธีการวัดผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้					
๑๒.มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินผลไว้อย่างชัดเจนและเหมาะสม					
รวม					

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม

๑.กระบวนการคิดที่ใช้ คือ.....

.....

๒.สิ่งที่ควรปรับปรุง คือ.....

.....

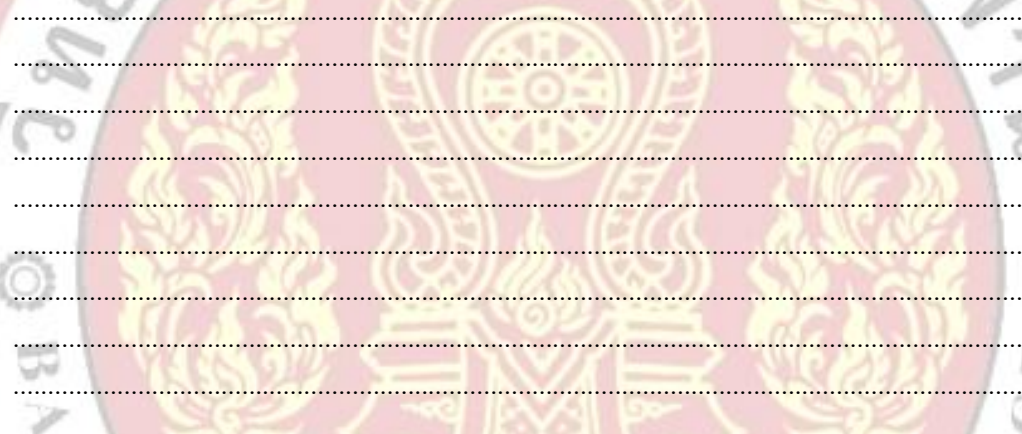
ผู้ประเมิน.....

บันทึกหลังการสอน

ข้อสรุปหลังการสอน

วิทยาลัยเทคนิคบางสี

ปัญหาที่พบ



แนวทางแก้ปัญหา

JYOTI INSTITUTE OF TECHNOLOGY

WISDOM BETTER KNOWLEDGE

APPHAN TECHNICAL COLLEGE

	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๒
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๓-๕
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
	ชื่อเรื่อง/งาน ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง	

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วย

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....-.....สมรรถนะย่อย.....-.....

๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน...-

๒) วิธีประเมิน.....-.....

๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)

๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากเงื่อนไขที่กำหนด

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

๑. บอกความหมายของวงกลมหนึ่งหน่วยได้

๒. หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วยได้

๓. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจุดภาคต่าง ๆ ได้

๕. สารการเรียนรู้

การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วย

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

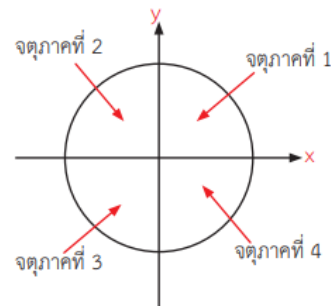
ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

๑. ครูผู้สอนกับนักเรียนร่วมกันทบทวนในหน่วยการเรียนรู้ที่ผ่านมาเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 0° ถึง

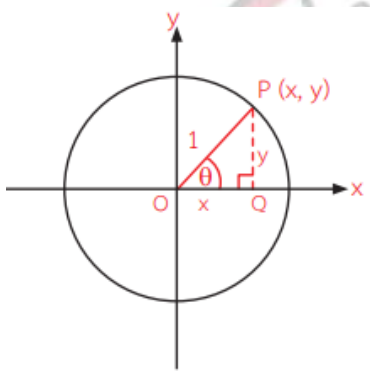
90° ซึ่งเกิดขึ้น ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่ในความเป็นจริงแล้ว เราสามารถหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติได้จากวงกลมหนึ่งหน่วย ทำให้ขนาดของมุมขยายออกไปได้ตั้งแต่ 0° ถึง 360° และขยายต่อไปอย่างไม่จำกัด ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่า การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย

๒. ครูผู้สอนยกตัวอย่างโดยแสดงรูปภาพ ให้ผู้เรียนดูพร้อมให้แสดงความคิดเห็น เพื่อเชื่อมโยงเข้าเนื้อหาโดย

วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ รัศมียาว 1 หน่วย มีด้านเริ่มต้นของมุมหมุนออกจากแกน x ด้านบวก เส้นแกน x และแกน y แบ่งวงกลมหนึ่งหน่วยออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วน เรียกว่า จุดภาค (Quadrant)



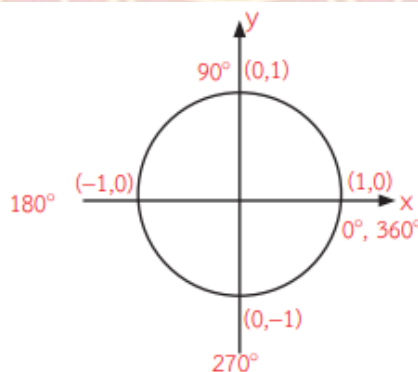
จาก OP เป็นรัศมีของวงกลมยาว 1 หน่วย จากสามเหลี่ยมมุมฉาก OPQ จะได้



$\sin \theta$	$=$	$\frac{PQ}{OP}$	$=$	$\frac{y}{1}$	$=$	y
$\cos \theta$	$=$	$\frac{OQ}{OP}$	$=$	$\frac{x}{1}$	$=$	x
$\tan \theta$	$=$	$\frac{PQ}{OQ}$	$=$	$\frac{y}{x}$	หรือ	$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
ดังนั้น $\operatorname{cosec} \theta$	$=$	$\frac{1}{y}$				
$\sec \theta$	$=$	$\frac{1}{x}$				
$\cot \theta$	$=$	$\frac{x}{y}$				

ขั้นตอน

3. ครูผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบนแกน X และแกน y กับผู้เรียนว่า มุมที่อยู่บนแกน X และ y ได้แก่มุม $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ และ 360° (ในการหมุนรอบแรก) จะได้ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งหาได้จากจุดที่เส้นรอบวงตัดแกน x และ แกน y ดังรูป



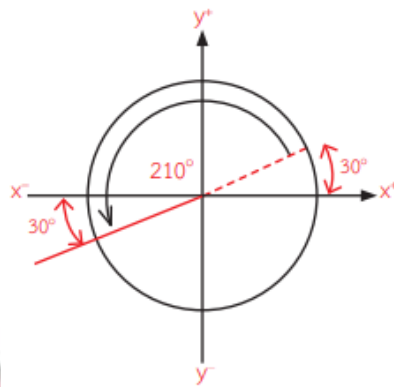
4. ครูใช้เทคนิควิธีสอนแบบใช้สื่อทัศนวัสดุ เป็นวิธีสอนที่นำอุปกรณ์สื่อทัศนวัสดุมาช่วยพัฒนาคุณภาพการเรียน

การสอน สื่อทัศนวัสดุดังกล่าว ได้แก่ Power Point เพื่ออธิบาย และสาธิตเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจุดภาคต่าง ๆ จากนั้นยกตัวอย่างประกอบ

ตัวอย่างที่ ๑

จงหาค่า $\sin 210^\circ$, $\cos 210^\circ$ และ $\tan 210^\circ$ จากตาราง

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\sin 210^\circ &= \sin (180^\circ + 30^\circ) \\ &= -\sin 30^\circ \\ \sin 210^\circ &= -\frac{1}{2} \\ \cos 210^\circ &= \cos (180^\circ + 30^\circ) \\ &= -\cos 30^\circ \\ \cos 210^\circ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 210^\circ &= \tan (180^\circ + 30^\circ) \\ &= \tan 30^\circ \\ \tan 210^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

5. ครูผู้สอนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดทักษะที่ ๓ ในหนังสือเรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. ครูผู้สอนและผู้เรียนสรุปความรู้ที่เรียนมาทั้งหมดในสัปดาห์นี้ โดยการถามตอบเป็นรายบุคคล โดย ฟังกันขึ้น

ตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง จะมีค่าเป็นบวก หรือลบพิจารณาได้จากมุมในตำแหน่งมาตรฐานว่าด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคใดในที่นี้จะสรุปเฉพาะฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายเป็นบวกในแต่ละจตุภาค ดังนี้

จตุภาคที่ 2	จตุภาคที่ 1
+ sin	+ sin
- cos	+ cos
- tan	+ tan
- sin	- sin
- cos	+ cos
+ tan	- tan
จตุภาคที่ 3	จตุภาคที่ 4

การวัดผลและประเมินผล

ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา

๒) ทดสอบก่อนเรียน

ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ
ต่องานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม

หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Power
๓. กิจกรรมการเรียนการสอน
๔. รูปภาพประกอบ
๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

๘.๑ หลักฐานความรู้

๑. บันทึกการสอน
๒. ใบเช็กรายชื่อ

๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน

๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน

๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. ตรวจสอบกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้
๓. ตรวจสอบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๒ วิธีประเมิน

๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๓ เครื่องมือประเมิน

๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา

	ใบความรู้ ที่ ๒	หน่วยที่ ...๒
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๓-๕
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ รัศมียาว 1 หน่วย มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม 1 หน่วย คือ มุมที่มีจุดยอดของมุมอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วย ด้านเริ่มต้นของมุมทับบนแกน x ทางด้านบวก เมื่อมุมหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกาทำมุม θ ด้านสิ้นสุดของมุมจะตัดเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยเพียงจุดเดียว คือ จุด $P(x,y)$ จะได้ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจตุภาคที่ 1 จะมีค่าเป็นบวกทุกฟังก์ชัน ส่วนค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจตุภาคที่ 2,3 และ 4 จะมีเครื่องหมายแตกต่างกัน

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากเงื่อนไขที่กำหนด

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

๔. บอกความหมายของวงกลมหนึ่งหน่วยได้
๕. หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วยได้
๖. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจตุภาคต่าง ๆ ได้

๕. เนื้อหาสาระ



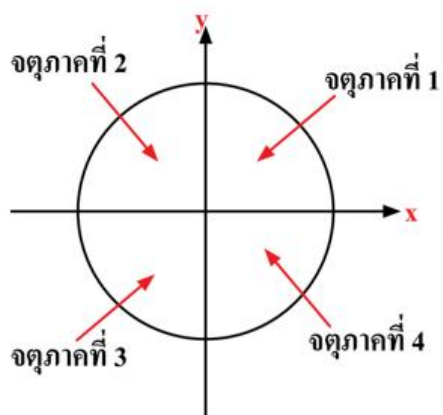
1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง

เราสามารถหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติได้จากวงกลมหนึ่งหน่วยทำให้ขนาดของมุมขยายออกไปได้ตั้งแต่ 0° ถึง 360° และขยายต่อไปอย่างไม่จำกัด ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่า การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย

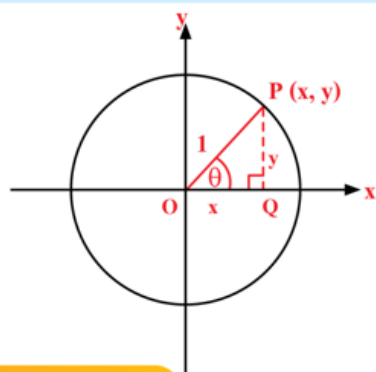
1.1 วงกลมหนึ่งหน่วย

วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีรัศมียาว 1 หน่วย มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ มีด้านเริ่มต้นของมุมหมุนออกจากแกน x ด้านบวก





เส้นแกน x และแกน y แบ่งวงกลม
หนึ่งหน่วยออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วน
เรียกว่า **จตุภาค (Quadrant)**



จาก OP เป็นรัศมีของวงกลมยาว 1 หน่วย
จากสามเหลี่ยมมุมฉาก OPQ จะได้

$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

ดังนั้น $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{y}$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{x}{y}$$



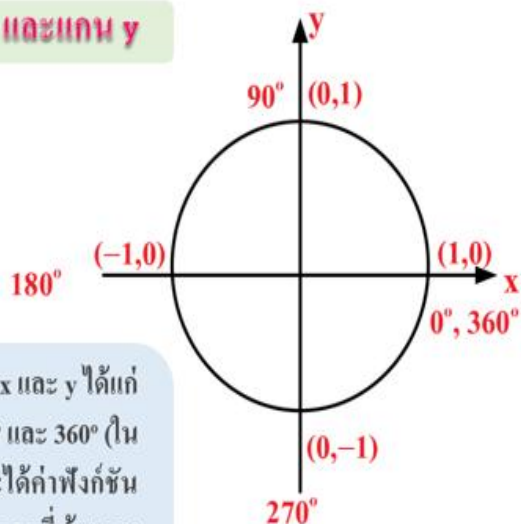
เทคนิคการจำ

cos คือ x
sin คือ y
tan คือ $\frac{y}{x}$

1.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบนแกน x และแกน y

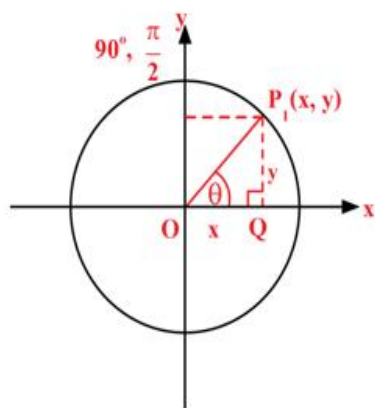


มุมที่อยู่บนแกน x และ y ได้แก่ มุม 0° , 90° , 180° , 270° และ 360° (ในการหมุนรอบแรก) จะได้ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งหาได้จากจุดที่เส้นรอบวงตัดแกน x และ แกน y ดังรูป



มุม	0°	90°	180°	270°	360°
ฟังก์ชัน	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0} = \text{หาค่าไม่ได้}$	0	หาค่าไม่ได้	0
$\operatorname{cosec} \theta$	หาค่าไม่ได้	1	หาค่าไม่ได้	-1	หาค่าไม่ได้
$\sec \theta$	1	หาค่าไม่ได้	-1	หาค่าไม่ได้	1
$\cot \theta$	หาค่าไม่ได้	0	หาค่าไม่ได้	0	หาค่าไม่ได้

1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจตุภาคต่าง ๆ

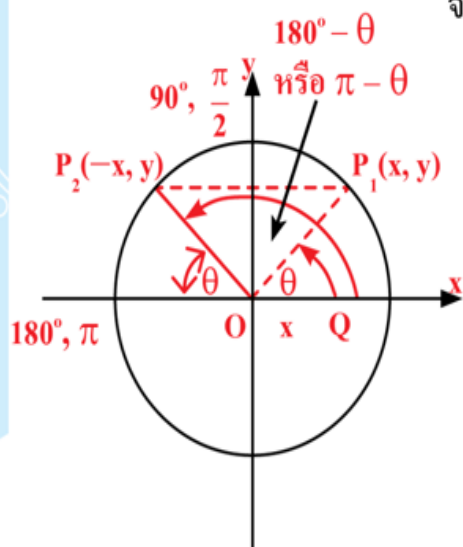


1. มุมในจตุภาคที่ 1 เขียนแทนด้วย มุม θ
จากรูปจะเห็นว่าด้าน OP_1 ตัดเส้นรอบวงที่ (x, y)

$$\text{จะได้ว่า } \sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



2. มุมในจตุภาคที่ 2 เขียนแทนด้วย มุม $180^\circ - \theta$ หรือ $\pi - \theta$
จากรูปจะเห็นว่าด้าน OP_2 ตัดเส้นรอบวงที่ $(-x, y)$

จะได้ว่า

$$\sin(180^\circ - \theta) \text{ หรือ } \sin(\pi - \theta) = y$$

$$= \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) \text{ หรือ } \cos(\pi - \theta) = -x$$

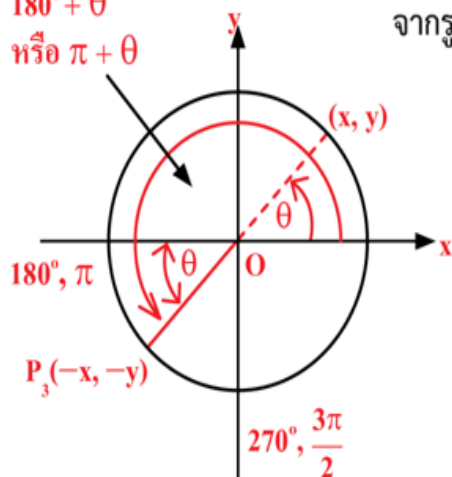
$$= -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) \text{ หรือ } \tan(\pi - \theta) = \frac{y}{-x}$$

$$= -\tan \theta$$

TECHNIC

$180^\circ + \theta$
หรือ $\pi + \theta$



3. มุมในจุดภาคที่ 3 เขียนแทนด้วยมุม $180^\circ + \theta$ หรือ $\pi + \theta$
จากรูปจะเห็นว่าด้าน OP_3 ตัดเส้นรอบวงที่ $(-x, -y)$

จะได้ว่า

$$\sin(180^\circ + \theta) \text{ หรือ } \sin(\pi + \theta) = -y$$

$$= -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) \text{ หรือ } \cos(\pi + \theta) = -x$$

$$= -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) \text{ หรือ } \tan(\pi + \theta) = \frac{-y}{-x}$$

$$= \tan \theta$$

4. มุมในจุดภาคที่ 4 เขียนแทนด้วยมุม $360^\circ - \theta$ หรือ $2\pi - \theta$
จากรูปจะเห็นว่าด้าน OP_4 ตัดเส้นรอบวงที่ $(x, -y)$

จะได้ว่า

$$\sin(360^\circ - \theta) \text{ หรือ } \sin(2\pi - \theta) = -y$$

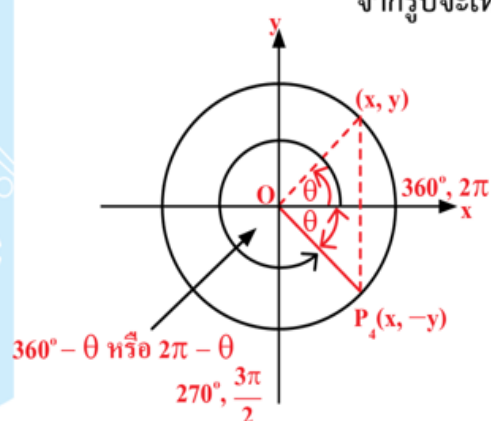
$$= -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) \text{ หรือ } \cos(2\pi - \theta) = x$$

$$= \cos \theta$$

$$\tan(360^\circ - \theta) \text{ หรือ } \tan(2\pi - \theta) = \frac{-y}{x}$$

$$= -\tan \theta$$

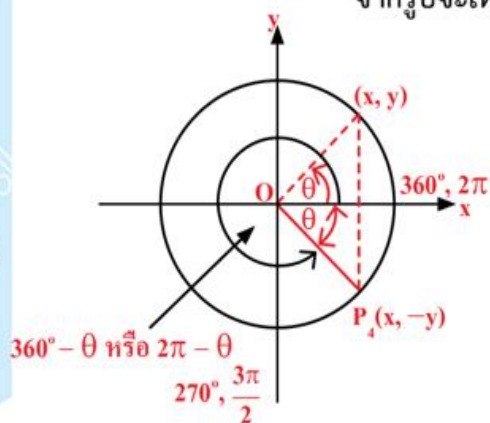




เครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในแต่ละจุดภาคขึ้นอยู่กับค่า x และ y ของจุดภาคนั้น ๆ สรุปได้ดังนี้

จุดภาคที่ 2	จุดภาคที่ 1
$+\sin$	$+\sin$
$-\cos$	$+\cos$
$-\tan$	$+\tan$
จุดภาคที่ 3	จุดภาคที่ 4
$-\sin$	$-\sin$
$-\cos$	$+\cos$
$+\tan$	$-\tan$

4. มุมในจุดภาคที่ 4 เขียนแทนด้วยมุม $360^\circ - \theta$ หรือ $2\pi + \theta$
จากรูปจะเห็นว่าด้าน OP_4 ตัดเส้นรอบวงที่ $(x, -y)$



จะได้ว่า

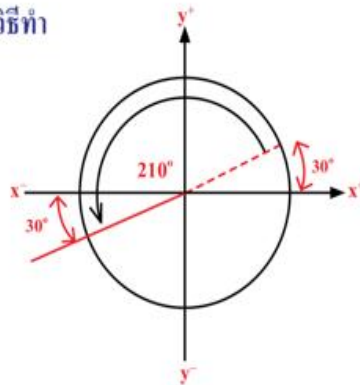
$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - \theta) \text{ หรือ } \sin(2\pi - \theta) &= -y \\ &= -\sin \theta \\ \cos(360^\circ - \theta) \text{ หรือ } \cos(2\pi - \theta) &= x \\ &= \cos \theta \\ \tan(360^\circ - \theta) \text{ หรือ } \tan(2\pi - \theta) &= \frac{-y}{x} \\ &= -\tan \theta \end{aligned}$$



ตัวอย่าง

จงหาค่า $\sin 210^\circ$, $\cos 210^\circ$ และ $\tan 210^\circ$

วิธีทำ



ค่า $\sin$ ของมุม 150° , 210° , และ 330° ต่างก็เป็นมุมที่สัมพันธ์กับมุม 30° จะมีค่าของฟังก์ชันเป็น $\frac{1}{2}$ เหมือนกัน แตกต่างกันเฉพาะเครื่องหมายบวก หรือลบเท่านั้น และฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ก็พิจารณาเช่นเดียวกัน

$$\sin 210^\circ = \sin (180^\circ + 30^\circ)$$

$$= -\sin 30^\circ$$

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \cos (180^\circ + 30^\circ)$$

$$= -\cos 30^\circ$$

$$\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ = \tan (180^\circ + 30^\circ)$$

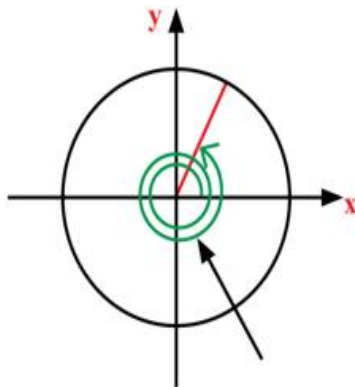
$$= \tan 30^\circ$$

$$\tan 210^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



2.

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีค่ามากกว่า 360°



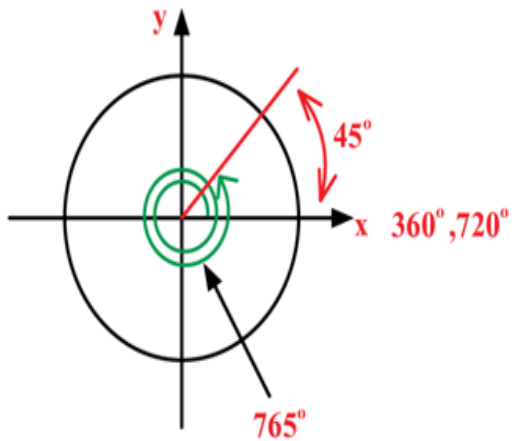
จากรูปจะเห็นว่ามุมที่หมุนรอบจุดศูนย์กลางเกินหนึ่งรอบสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้เช่นเดียวกันกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่อยู่ระหว่าง 0° ถึง 360° นั่นเอง ซึ่งอาจเขียนแทนขนาดของมumdังกล่าวได้ว่า $n360^\circ + \theta$ หรือ $2n\pi + \theta$ เมื่อ n แทน จำนวนรอบ





ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 765^\circ$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\sin 765^\circ &= \sin ((2 \times 360^\circ) + 45^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \\ \sin 765^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



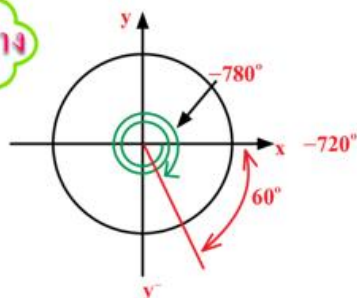
3.

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีค่ามากกว่า 360°

ในกรณีที่มุมหมุนออกจากด้านเริ่มต้น (แกน x ด้านบวก) ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ค่าของมุมจะเป็นลบ แต่ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าเป็นลบก็มีวิธีการหาเช่นเดียวกับมุมอื่น ๆ



ตัวอย่าง



จงหาค่าของ $\sin (-780^\circ)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin (-780^\circ) &= \sin ((-720^\circ) + (-60^\circ)) \\ &= \sin ((2 \times (-360^\circ)) + (-60^\circ)) \\ &= -\sin 60^\circ \\ \sin (-780^\circ) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

๖. แบบฝึกหัด/แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ชั้นหน้าใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ฯ)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๒	หน่วยที่ ... ๒
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๓-๕
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง		

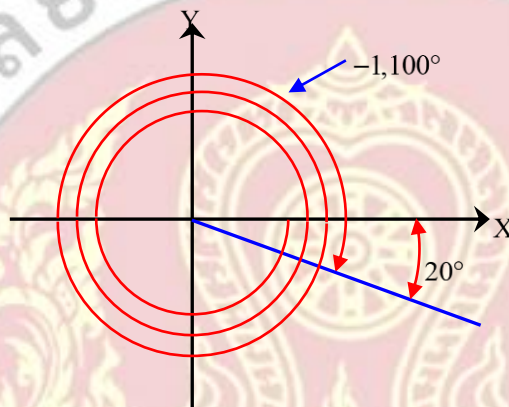
เฉลย คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๒ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมรอบจุดศูนย์กลาง

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ ๒

๑. ตอบ ง.

วิธีทำ

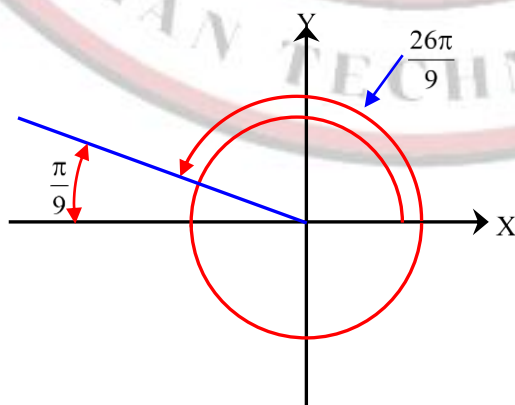


$$\begin{aligned}
 \text{มุม} \quad -1,100^\circ &= -[(3 \times 360^\circ) + 20^\circ] \\
 &= -(6\pi + 20^\circ) \\
 &= -20^\circ
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า มุม $-1,100^\circ$ อยู่ในจุดภาคที่ ๔

๒. ตอบ ข.

วิธีทำ

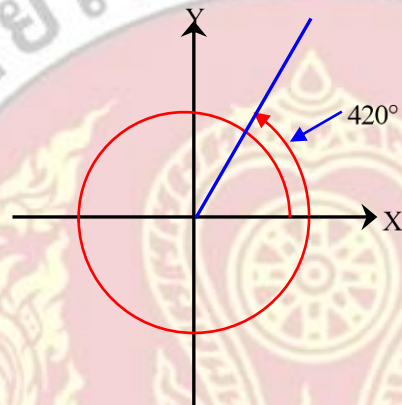


$$\begin{aligned}\text{มุม} \quad \frac{26\pi}{9} &= 2\pi + \frac{8\pi}{9} \\ &= \frac{8\pi}{9} \\ &= 160^\circ\end{aligned}$$

จะได้ว่า มุม $\frac{26\pi}{9}$ อยู่ในจตุภาคที่ ๒

๓. ตอบ ข.

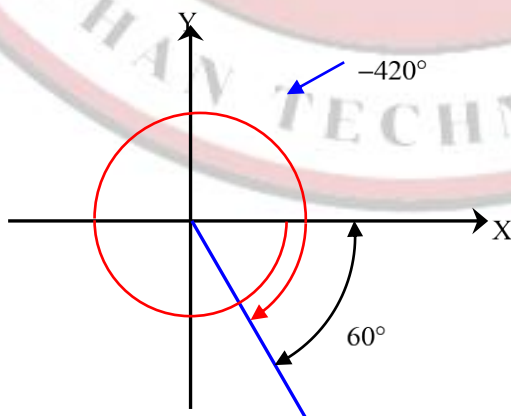
วิธีทำ



$$\begin{aligned}\sin 420^\circ &= \sin (360^\circ + 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

๔. ตอบ ง.

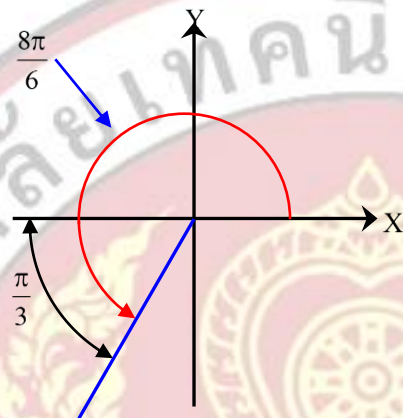
วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \cos(-420^\circ) &= \cos(-360^\circ - 60^\circ) \\
 &= \cos(-60^\circ) \\
 &= \cos(60^\circ) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

๕. ตอบ ง.

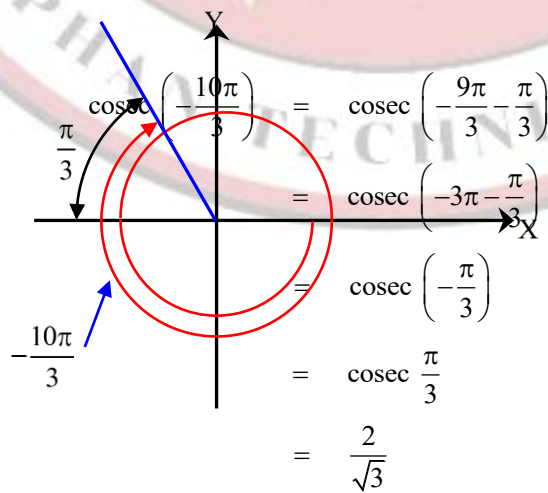
วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \tan \frac{8\pi}{6} &= \tan \left(\pi + \frac{2\pi}{6} \right) \\
 &= -\tan \frac{2\pi}{6} \\
 &= -\tan \frac{\pi}{3} \\
 &= -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

๖. ตอบ ก.

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \operatorname{cosec} \left(-\frac{10\pi}{3} \right) &= \operatorname{cosec} \left(-\frac{9\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \operatorname{cosec} \left(-3\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \operatorname{cosec} \left(-\frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

๗. ตอบ ข.

วิธีทำ

$$\begin{aligned}2 \sin 315^\circ - 4 \cos 240^\circ &= 2 \sin (360^\circ - 45^\circ) - 4 \cos (180^\circ + 60^\circ) \\&= 2(-\sin 45^\circ) - 4(-\cos 60^\circ) \\&= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right) \\&= -\sqrt{2} + 2 \\&= 2 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

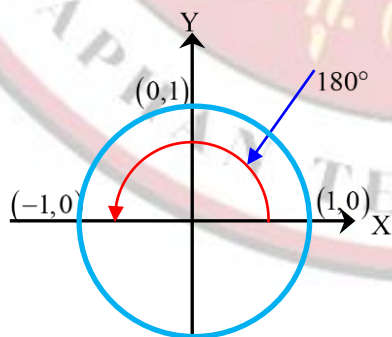
๘. ตอบ ก.

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\left(2 \sin \frac{4\pi}{3}\right)\left(\sin^2 \frac{2\pi}{3}\right) &= \left(2 \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)\left(\sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) \\&= \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\&= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\&= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \\&= -\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

๙. ตอบ ค.

วิธีทำ



จากรูป $(0,1) \sin \theta = 0$

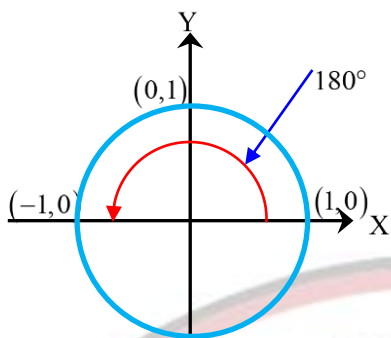
จะได้ $\sin 0^\circ = 0$

และ $\sin 180^\circ = 0$

ดังนั้น $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

๑๐. ตอบ ค.

วิธีทำ



จากรูป
จะได้
และ
ดังนั้น

$$\cos \theta = -1$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$\theta = 180^\circ$$



แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดย
 กำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำงานจริงใจต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้ งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จัก ฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ทรัพย์สิน สิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชีรายรับ-รายจ่ายของ ตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อ วิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช่เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและ ปฏิบัติเต็มที่ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและ กาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกันยังคงมี ความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อมถูกต้อง ตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกาย ใจและสภาพแวดล้อม มีความผ่องใสเป็นที่เจริญตาแก่ผู้พบเห็น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น รู้ บทบาทของตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวมพลัง ช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและขัดความขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมที่จะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละ ความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มีความ เดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วมสร้างสรรค์สิ่งดี งามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ			
28-30 คะแนน =	ดีมาก	15-19 คะแนน =	ควรปรับปรุง
25-27 คะแนน =	ดี	0-14 คะแนน =	ใช้ไม่ได้
20-24 คะแนน =	พอใช้		

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดย
 กำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แนวทางแก้ปัญหา



	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๓
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๖-๘
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ สมการตรีโกณมิติ	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง/งาน สมการตรีโกณมิติ		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

1. ลักษณะของสมการตรีโกณมิติ
2. เอกลักษณะตรีโกณมิติ
3. การแก้สมการตรีโกณมิติ

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....-.....สมรรถนะย่อย.....-.....

- ๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน...-
- ๒) วิธีประเมิน.....-.....
- ๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)
- ๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

1. หาค่าเอกลักษณะตรีโกณมิติ
2. แก้สมการตรีโกณมิติได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจลักษณะของตรีโกณมิติและสามารถนำไปใช้ได้
2. หาค่าเอกลักษณะตรีโกณมิติได้
3. สามารถแก้สมการตรีโกณมิติได้

๕. สารการเรียนรู้

4. ลักษณะของสมการตรีโกณมิติ
5. เอกลักษณะตรีโกณมิติ
6. การแก้สมการตรีโกณมิติ

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูผู้สอนกับนักเรียนร่วมกันทบทวนการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในหลากหลายรูปแบบ จากนั้นให้ผู้เรียนทำ

แบบทดสอบก่อนเรียน

ขั้นสอน

2. ครูผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับความหมายและลักษณะของตรีโกณมิติกับนักเรียนว่า สมการตรีโกณมิติ หมายถึง สมการที่มีพจน์ใดพจน์หนึ่ง เขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น

$$\sin x + \cos 30^\circ = 1$$

$$\tan 2x + 2\cot x = 0$$

คำตอบของสมการตรีโกณมิติ ในบางสมการอาจมีเพียงคำตอบเดียว หรือมีหลายคำตอบ หรือ

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin x &= \frac{1}{\operatorname{cosec} x} & \text{และ} & \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \\ 2. \quad \cos x &= \frac{1}{\sec x} & \text{และ} & \sec x = \frac{1}{\cos x} \\ 3. \quad \tan x &= \frac{1}{\cot x} & \text{และ} & \cot x = \frac{1}{\tan x} \\ 4. \quad \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \text{และ} & \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \\ 5. \quad \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 6. \quad 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x \\ 7. \quad 1 + \cot^2 x &= \operatorname{cosec}^2 x \\ 8. \quad \sin 2x &= 2\sin x \cos x \end{aligned}$$

อาจไม่มีคำตอบเลยก็ได้

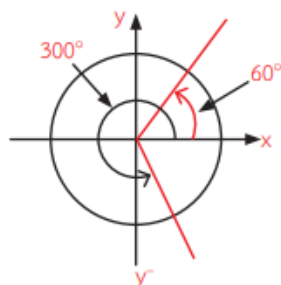
3. จากนั้นครูผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ว่า เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ เป็นการแสดงว่าสมการตรีโกณมิติทั้งสองข้างมีค่าเท่ากันเสมอ ซึ่งในการแก้สมการตรีโกณมิติ เรามักจะใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติช่วยทำให้การหาคำตอบของสมการทำได้ง่ายขึ้น เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ควรทราบมีดังต่อไปนี้

4. จากนั้นครูผู้สอนก็อธิบายต่อการแก้สมการตรีโกณมิติ เป็นการหาคำตอบที่ทำให้สมการตรีโกณมิติเป็นจริง ซึ่งจะต้องคำนึงถึง ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีเครื่องหมายแตกต่างกัน เมื่อมุมอยู่ในจุดภาคต่างกัน และต้องพิจารณาขอบเขต ของมุมที่กำหนดให้ด้วย พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

จงหาค่า x จากสมการ $2\cos x = 1$ เมื่อ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

ตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ



$$\begin{aligned} 2 \cos x &= 1 \\ \cos x &= \frac{1}{2} & \text{ซึ่งเป็นมุมในจุดภาคที่ 1 และ 4} \\ \text{จาก } \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ มุมในจุดภาคที่ 1 คือ } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

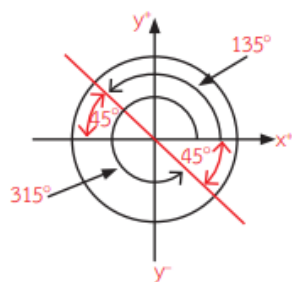
$$\text{และ มุมในจุดภาคที่ 4 คือ } \cos (360^\circ - 60^\circ) = \cos 300^\circ = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ค่า x คือ 60° และ 300°

ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่า x จากสมการ $3 \tan x = -3$

วิธีทำ



$3 \tan x = -3$
 $\tan x = -1$ ซึ่งเป็นมุมในจุดภาคที่ 2 และ 4
 จาก $\tan 45^\circ = 1$
 จะได้ มุมในจุดภาคที่ 2 คือ $\tan (180^\circ - 45^\circ) = -1$
 $\tan 135^\circ = -1$
 และ มุมในจุดภาคที่ 4 คือ $\tan (360^\circ - 45^\circ) = -1$
 $\tan 315^\circ = -1$
 แต่โจทย์ไม่ได้กำหนดขอบเขตของมุม จึงสามารถตอบได้หลายคำตอบ
 ดังนั้น ค่า x คือ $135^\circ, 315^\circ, 495^\circ$ และ $675^\circ, \dots$
 หรือเขียนอยู่ในรูปทั่วไป คือ $n180^\circ - 45^\circ$ หรือ $n\pi - 45^\circ$

5. ครูผู้สอนให้ผู้เรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1 ท้ายหน่วยจากนั้นสุ่มผู้เรียนออกมาเฉลยหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. ครูผู้สอนและผู้เรียนสรุปความรู้ที่เรียนมาเกี่ยวกับสมการตรีโกณมิติ จากนั้นนักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน

การวัดผลและประเมินผล

- ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา
 ๒) ทดสอบก่อนเรียน
 ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ
 ต่องานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม
 หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Point
๓. กิจกรรมการเรียนการสอน
๔. รูปภาพประกอบ
๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

- ๘.๑ หลักฐานความรู้
 ๑. บันทึกการสอน
 ๒. ใบเช็กรายชื่อ
 ๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน
 ๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

- ๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน
 ๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

- ๒. ตรวจสอบกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้
- ๓. ตรวจสอบประเมินผลการเรียนรู้
- ๙.๒ วิธีการประเมิน
 - ๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
 - ๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้
- ๙.๓ เครื่องมือประเมิน
 - ๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
 - ๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา



	ใบความรู้ ที่ ๓	หน่วยที่ ...๓
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๖-๘
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ สมการตรีโกณมิติ	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง สมการตรีโกณมิติ		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

วการแก้สมการตรีโกณมิติ เป็นการหาคำตอบทำให้สมการตรีโกณมิติเป็นจริง ซึ่งจะต้องคำนึงถึง ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีเครื่องหมายแตกต่างกัน เมื่อมุมอยู่ในจุดภาคต่างกันและต้องพิจารณาขอบเขต ของมุมที่กำหนดให้ด้วย

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

- หาค่าเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ
- แก้สมการตรีโกณมิติได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

- เข้าใจลักษณะของตรีโกณมิติและสามารถนำไปใช้ได้
- หาค่าเอกลักษณ์ตรีโกณมิติได้
- สามารถแก้สมการตรีโกณมิติได้

๕. เนื้อหาสาระ



1. ลักษณะของสมการตรีโกณมิติ

สมการตรีโกณมิติ หมายถึง สมการที่มีพจน์ใดพจน์หนึ่ง เขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น

$$\sin x + \cos 30^\circ = 1$$

$$\tan 2x + 2\cot x = 0$$

คำตอบของสมการตรีโกณมิติ ในบางสมการอาจมีเพียงคำตอบเดียว หรือมีหลายคำตอบหรืออาจไม่มีคำตอบเลยก็ได้





2. เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ เป็นการแสดงว่าสมการตรีโกณมิติทั้งสองข้างมีค่าเท่ากันเสมอ ซึ่งในการแก้สมการตรีโกณมิติ เรามักจะใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติช่วยทำให้การหาคำตอบของสมการทำได้ง่ายขึ้น เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ควรทราบมีดังต่อไปนี้

1. $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ และ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

2. $\cos x = \frac{1}{\sec x}$ และ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

3. $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ และ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$



4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ และ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

6. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

7. $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

8. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$





3. การแก้สมการตรีโกณมิติ



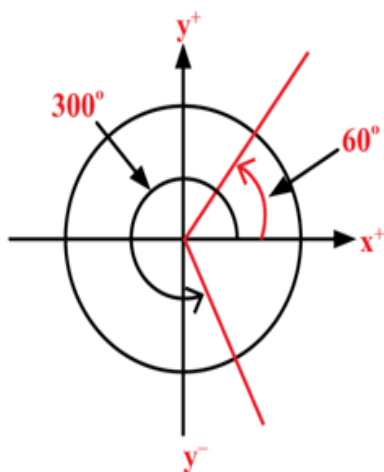
การแก้สมการตรีโกณมิติ เป็นการหาคำตอบที่ทำให้สมการตรีโกณมิติเป็นจริง ซึ่งจะต้องคำนึงถึงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีเครื่องหมายแตกต่างกัน เมื่อมุมอยู่ในจตุภาคต่างกัน และต้องพิจารณาช่วงของมุมที่กำหนดให้ด้วย



ตัวอย่าง

จงหาค่า x จากสมการ $2\cos x = 1$ เมื่อ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

วิธีทำ



$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

ซึ่งเป็นมุมในจตุภาคที่ 1 หรือ 4

$$\text{จาก } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

จะได้ มุมในจตุภาคที่ 1 คือ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{และ มุมในจตุภาคที่ 4 คือ } \cos (360^\circ - 60^\circ) = \cos 300^\circ = \frac{1}{2}$$

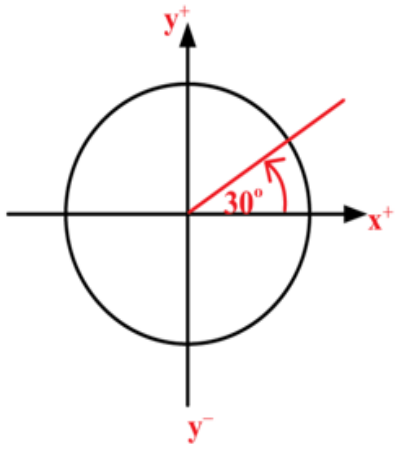
ดังนั้น ค่า x คือ 60° หรือ 300°



ตัวอย่าง

จงหาค่า x จากสมการ $\sin 30^\circ - \cos 2x = 0$ เมื่อ $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

วิธีทำ



$$\begin{aligned} \sin 30^\circ - \cos 2x &= 0 \\ \sin 30^\circ &= \cos 2x \\ \text{จาก } \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \text{จะได้ } \cos 2x &= \frac{1}{2} \quad \text{ซึ่งเป็นมุมในจุดภาคที่ 1 เท่านั้น} \\ \text{จาก } \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \\ \text{จะได้ } \cos 2x &= \cos 60^\circ \\ \text{นั่นคือ } 2x &= 60^\circ \\ x &= 30^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่า x คือ 30°

๖. แบบฝึกหัด/แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ชั้นหน้าใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ฯ)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๓	หน่วยที่ ... ๓
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๖-๗

	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ สมการตรีโกณมิติ	<table> <tr> <td>ทฤษฎี</td><td>๐</td><td>ชม.</td></tr> <tr> <td>ปฏิบัติ</td><td>๒</td><td>ชม.</td></tr> </table>	ทฤษฎี	๐	ชม.	ปฏิบัติ	๒	ชม.
ทฤษฎี	๐	ชม.						
ปฏิบัติ	๒	ชม.						
ชื่อเรื่อง สมการตรีโกณมิติ								

เฉลย คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 สมการตรีโกณมิติ

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ 3

1. ตอบ ง.

วิธีทำ สมการตรีโกณมิติ หมายถึง สมการที่มีพจน์ใดพจน์หนึ่งเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ดังนั้น $\sin x - \cos x = 0$ เป็นสมการตรีโกณมิติ

$\sin x = 0.5$ เป็นสมการตรีโกณมิติ

และ $\sin^2 x + \cos x = 1$ เป็นสมการตรีโกณมิติ

2. ตอบ ค.

วิธีทำ จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}$$

ดังนั้น $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ กล่าวถูกต้อง

3. ตอบ ค.

วิธีทำ จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

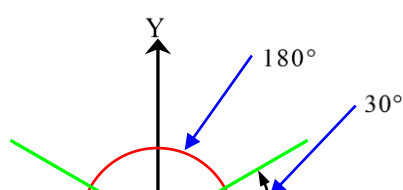
$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

ดังนั้น $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ กล่าวผิด

4. ตอบ ค.



วิธีทำ

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

จาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

จะได้ มุมในจตุภาคที่ 1 คือ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

และ จะได้มุมในจตุภาคที่ 2 คือ $\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ค่า x คือ 30° และ 150°

5. ตอบ ง.

วิธีทำ

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{อยู่ในจตุภาคที่ 3 และ 4}$$

จาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

มุมในจตุภาคที่ 3 คือ

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + 30^\circ) &= \sin 210^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

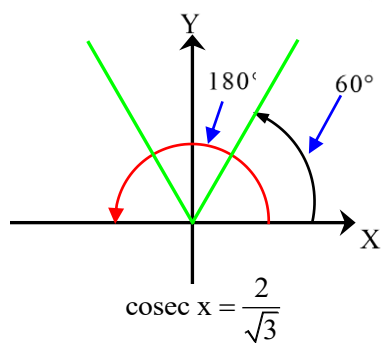
มุมในจตุภาคที่ 4 คือ

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - 30^\circ) &= \sin 330^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $x = 210^\circ$ และ 330°

ดังนั้น x ไม่อยู่ใน $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

6. ตอบ ก.



วิธีทำ

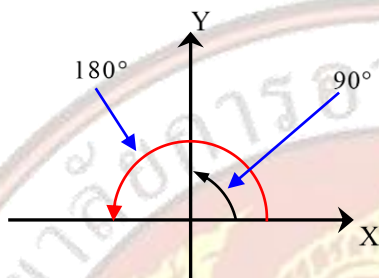
จาก $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

จะได้ มุมในจุดภาคที่ 1 คือ $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

และ มุมในจุดภาคที่ 2 คือ $\operatorname{cosec} (180^\circ - 60^\circ) = \operatorname{cosec} 120^\circ$
 $= \frac{2}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น ค่า x คือ 60° และ 120°

7. ตอบ ก.



วิธีทำ

$$\sin x = 1$$

จาก $\sin 90^\circ = 1$

จะได้ มุมตรงแกน Y คือ $\sin 90^\circ = 1$

ดังนั้น ค่า x คือ 90°

8. ตอบ ก.

วิธีทำ

$$2 \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = -1 \quad \text{ซึ่งเป็นมุมแกน X}$$

จาก $\cos 180^\circ = -1$

ดังนั้น ค่า x คือ 180°

9. ตอบ ข.

วิธีทำ

$$2 \sin^2 x + 2 = 0$$

$$\sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm 1$$

จะได้ $\sin x = 1$

ซึ่ง $\sin 90^\circ = 1$

จะได้ $\sin x = -1$

ซึ่ง $\sin 270^\circ = -1$

ดังนั้น ค่า x คือ 90° และ 270°

10. ตอบ ข.

วิธีทำ

$$\tan^2 x = 1$$

$$\tan x = \pm 1$$

จาก $\tan x = 1$

จะได้ มุมในจตุภาคที่ 1 และ 3

มุมในจตุภาคที่ 1 คือ $\tan 45^\circ = 1$

มุมในจตุภาคที่ 3 คือ $\tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 225^\circ$

$$= 1$$

นั่นคือ ค่า x คือ 45° และ 225°

จาก $\tan x = -1$

จะได้ มุมในจตุภาคที่ 2 และ 4

มุมในจตุภาคที่ 2 คือ $\tan(180^\circ - 45^\circ) = \tan 135^\circ$

$$= -1$$

มุมในจตุภาคที่ 4 คือ $\tan(360^\circ - 45^\circ) = \tan 315^\circ$

$$= -1$$

นั่นคือ ค่า x คือ 135° และ 315°

ดังนั้น ค่า x คือ 45° , 135° , 225° และ 315°



แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดย
 กำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำงานจริงใจต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จักฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ทรัพย์สิน สิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชีรายรับ-รายจ่ายของตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อวิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช่เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและปฏิบัติเต็มທີ່ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและกาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกันยังคงมีความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อมถูกต้องตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกาย ใจและสภาพแวดล้อม มีความผ่องใสเป็นที่เจริญตาแก่ผู้พบเห็น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น รู้บทบาทของตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวมพลังช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและขัดความขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมที่จะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มีความเดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วมสร้างสรรค์สิ่งดีงามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ

28-30 คะแนน = ดีมาก 15-19 คะแนน = ควรปรับปรุง
 25-27 คะแนน = ดี 0-14 คะแนน = ใช้ไม่ได้
 20-24 คะแนน = พอใช้

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดย
กำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
	๕	๔	๓	๒	๑
๑.ผลการเรียนที่คาดหวังมีความชัดเจน ครอบคลุมพฤติกรรมทุกด้าน (KAP)					
๒.เนื้อหาสาระมีความถูกต้อง ครอบคลุม และชัดเจน					
๓.กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๔.กิจกรรมการเรียนรู้มีความหลากหลาย น่าสนใจและเน้นกระบวนการคิด การฟัง การพูด การอ่าน การดูและการเขียน					
๕.กิจกรรมการเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง					
๖.กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง					
๗.กิจกรรมการเรียนรู้เพียงพอที่จะส่งผลให้บรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๘.กิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดสามารถนำไปปฏิบัติการสอนได้จริง					
๙.มีสื่อที่สอดคล้องกับกิจกรรมและเป็นสื่อที่เน้นกระบวนการคิด					
๑๐.มีการวัดผลประเมินผลที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๑๑.วิธีการวัดผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้					
๑๒.มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินผลไว้อย่างชัดเจนและเหมาะสม					
รวม					

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม

๑.กระบวนการคิดที่ใช้ คือ.....

.....

๒.สิ่งที่ควรปรับปรุง คือ.....

.....

ผู้ประเมิน.....

บันทึกหลังการสอน

ข้อสรุปหลังการสอน

[illegible]

ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แนวทางแก้ปัญหา



	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๗
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๖-๑๗
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ดีเทอร์มิแนนต์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง/งาน ดีเทอร์มิแนนต์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

๑. ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง
๒. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์
๓. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....-.....สมรรถนะย่อย.....-.....

๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน...-

๒) วิธีประเมิน.....-.....

๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)

๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดไม่เกิน 3×3 และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

๑. บอกความหมายของดีเทอร์มิแนนต์ได้
๒. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยงได้
๓. หาไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ได้
๔. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้
๕. นำความรู้เรื่องสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์มาใช้ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้
๖. นำความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๕. สารการเรียนรู้

๔. ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง
๕. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์
๖. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูใช้เทคนิคการสอนแบบซิปปาโมเดล (CIPPA MODEL) โดยการทบทวนความรู้เดิมจากสัปดาห์ที่ผ่านมา โดย
ดึงความรู้เดิมของผู้เรียนในเรื่องที่จะเรียน เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความพร้อมในการเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้เดิม
ของตน ผู้สอนใช้การสนทนาซักถามให้ผู้เรียนเล่าประสบการณ์เดิม
2. ครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน จากนั้นครูเริ่มอธิบายเนื้อหาเกี่ยวกับความหมายของดีเทอร์มิแนนต์ว่า
ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) หรือตัวกำหนด เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่หาค่าได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีประโยชน์
ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างมาก

ขั้นสอน

3. ครูกล่าวถึงวิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการคูณทแยงพร้อมยกตัวอย่างประกอบ จากเมทริกซ์จัตุรัส A จะได้
ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัส A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ อ่านว่า ดีเทอร์มิแนนต์ A หาค่าได้ ดังนี้
 - ๑) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 1×1 เป็นสมาชิกที่อยู่ในเมทริกซ์จัตุรัส 1×1
ตัวอย่างที่ ๑ ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส $A = [3]$ แล้ว $\det A = |3| = 3$
ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส $B = [-3]$ แล้ว $\det B = |-3| = -3$
 - ๒) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 2 เป็นผลต่างของผลคูณของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยง
มุมหลักกับ
ผลคูณของสมาชิก ที่อยู่บนเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งที่เหลือ

ตัวอย่างที่ ๒

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$① \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \\ &= (3 \times 4) - (1 \times 2) \\ &= 12 - 2 \\ \det A &= 10 \end{aligned}$$

$$② \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \\ &= ((-3) \times 4) - (1 \times 2) \\ &= -12 - 2 \\ \det B &= -14 \end{aligned}$$

$$③ \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \\ &= ((-4) \times 0) - ((-5) \times 2) \\ &= 0 - (-10) \\ \det C &= 10 \end{aligned}$$

- ๓) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 3 เป็นผลของการคูณที่ เกิดจากการนำ หลักที่ 1 และ 2 มาต่อเป็นหลักที่ 4 และ 5 แล้วนำผลบวกของผลคูณสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจาก ด้านบนซ้ายมาด้านล่างขวา ลบด้วยผลบวกของ ผลคูณสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากด้านล่าง ซ้ายไปด้านบนขวา

ตัวอย่างที่ ๓

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้ $\det A$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & \\ 0 & -16 & -9 & & & \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 16 - 9) - (0 - 6 - 2)$$

$$= (-25) - (-8)$$

$$= (-25) + 8$$

$$\det A = -17$$

4. จากนั้นครูให้ผู้เรียนทำแบบฝึกทักษะในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยงในหนังสือเรียน
5. ครูกล่าวถึงการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์อีกหนึ่งวิธีคือการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจาย โคแฟคเตอร์

ซึ่งวิธีการกระจายโคแฟคเตอร์ สามารถใช้ได้กับดีเทอร์มิแนนต์อันดับสองขึ้นไป และจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับไมเนอร์ (Minor) และโคแฟคเตอร์ (Cofactor) ก่อน ดังนี้

- ๑) **ไมเนอร์ (Minor)** ไมเนอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของดีเทอร์มิแนนต์ที่เกิดจากการตัดสมาชิกแถวที่ i และ หลักที่ j ออกจากเมทริกซ์จัตุรัส A เขียนแทนด้วย M_{ij} อ่านว่า ไมเนอร์ของ a_{ij}

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ จงหา M_{11} , M_{21} , และ M_{22}

วิธีทำ

- ๑) M_{11} หาจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของ A

จะได้ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $M_{11} = |-4| = -4$

- ๒) M_{21} หาจากการตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 1 ของ A

จะได้ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $M_{21} = |2| = 2$

- ๓) M_{22} หาจากการตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 2 ของ A

จะได้ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $M_{22} = |-3| = -3$

- ๒) โคแฟกเตอร์ (Cofactor) โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของ M_{ij} ที่มีเครื่องหมายเป็นบวกหรือลบ โดยการ นำ เอา $(-1)^{i+j}$ ยกกำลังแถวที่ i รวมกับหลักที่ j เขียนแทนด้วย c_{ij} อ่านว่า โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} นั่นคือ $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} 2 \quad C_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1) |2| \\ C_{21} &= -2 \\ 3 \quad C_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} \\ &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (1) |-3| \\ C_{22} &= -3 \end{aligned}$$

- ๓) การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ เป็นการลดอันดับของ ดีเทอร์มิแนนต์ โดยการหาผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือในหลักใดหลักหนึ่ง กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิก

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ A เมื่อ

เลือกกระจายตามแถวที่ i จะได้ $\det A = (a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in})$

และถ้าเลือกกระจายตามหลักที่ j จะได้ $\det A = (a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj})$

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ โดยใช้วิธีการกระจายโคแฟกเตอร์

วิธีที่ ๑ เลือกกระจายตามแถวที่ 1 จาก $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

จากสูตร $\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12}$ ①

$$\begin{aligned} \text{หา } C_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} & \text{หา } C_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \\ &= (1) |4| & &= (-1) |1| \\ C_{11} &= 4 & C_{12} &= -1 \end{aligned}$$

แทนค่า a_{11}, a_{12}, c_{11} และ c_{12} ใน ① จะได้ $\det A = 3(4) + 2(-1)$

$\det A = 10$

วิธีที่ ๒ เลือกกระจายตามหลักที่ 1 จาก $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

จากสูตร $\det A = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21}$ ①

$$\begin{aligned} \text{หา } C_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} & \text{หา } C_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} \\ &= (1) |4| & &= (-1) |2| \\ C_{11} &= 4 & C_{21} &= -2 \end{aligned}$$

แทนค่า a_{11}, a_{21}, c_{11} และ c_{21} ใน ① จะได้ $\det A = 3(4) + 1(-2)$

$\det A = 10$

ตัวนั้น ๆ นั่นคือ

ตัวอย่าง

6. จากนั้นครูกล่าวถึงสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งจะช่วยในการหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ทำได้สะดวกมากขึ้น

สมบัติ ของดีเทอร์มิแนนต์มี ดังนี้

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด $n \times n$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $k \neq 0$

- ๑) ถ้าสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของ A มีค่าเป็น 0 ทั้งหมด แล้ว $\det A = 0$
- ๒) ถ้าสมาชิก 2 แถวใด ๆ หรือ 2 หลักใด ๆ ของ A มีค่าเท่ากันทุกคู่ แล้ว $\det A = 0$
- ๓) ถ้าสมาชิกในแถวหนึ่ง หรือหลักหนึ่งมีค่าเป็น k เท่าของอีกแถวหนึ่ง หรือหลักหนึ่ง โดยที่ $k \neq 0$ แล้ว $\det A = 0$
- ๔) ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำเอาเมทริกซ์ A มาสลับแถว หรือหลักใด ๆ แล้ว $\det A = -\det B$
- ๕) ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำจำนวน k คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det B = k \det A$
- ๖) $\det A = \det A^t$ เสมอ
- ๗) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ จัตุรัสที่มีขนาดเท่ากันแล้ว $\det (AB) = (\det A)(\det B)$
- ๘) ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด $n \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ k ใด ๆ คูณกับเมทริกซ์ A โดยที่ $k \neq 0$ แล้ว $\det B = k^n \det A$
- ๙) ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำ k ใดๆ คูณกับแถวใดแถวหนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง หรือการนำ k ใด ๆ คูณกับหลักใดหลักหนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่งแล้ว $\det B = \det A$
- ๑๐) ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ แล้ว $\det A^n = (\det A)^n$
- ๑๑) ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมใด ๆ แล้ว $\det A$ จะมีค่าเท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนว เส้นทแยงมุมหลัก

๗. ผู้เรียนทำแบบฝึกทักษะที่ ๒

ขั้นสรุปและการประยุกต์

๘. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการตอบคำถาม
๙. ครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนท้ายหน่วยที่ ๗

การวัดผลและประเมินผล

ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา

๒) ทดสอบก่อนเรียน

ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ
ต่องานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม

หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Power
๓. กิจกรรมการเรียนการสอน
๔. รูปภาพประกอบ
๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

- ๘.๑ หลักฐานความรู้
 ๑. บันทึกการสอน
 ๒. ใบเช็กรายชื่อ
- ๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน
 ๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

- ๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน
 ๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
 ๒. ตรวจสอบกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้
 ๓. ตรวจสอบประเมินผลการเรียนรู้
- ๙.๒ วิธีการประเมิน
 ๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
 ๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้
- ๙.๓ เครื่องมือประเมิน
 ๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
 ๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

- ๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

- ๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

- ๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา

	ใบความรู้ ที่ ๗	หน่วยที่ ...๗
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๖-๑๗
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ดีเทอร์มิแนนต์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) หรือตัวกำหนด เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่หาค่าได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างมาก

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดไม่เกิน 3×3 และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

๘. บอกความหมายของดีเทอร์มิแนนต์ได้

๙. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยงได้

๑๐. หาไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ได้

๑๑. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้

๑๒. นำความรู้เรื่องสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์มาใช้ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้

๑๓. นำความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๕. เนื้อหาสาระ๑. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

๑. ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) หรือตัวกำหนด เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่หาค่าได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างมาก จากเมทริกซ์จัตุรัส A จะได้ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัส A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ อ่านว่า ดีเทอร์มิแนนต์ A หาค่าได้ดังนี้

๑.๒ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ ๒

เป็นผลต่างของผลคูณของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักกับผลคูณของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งที่เหลือ

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

นั่นคือ ถ้า กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 แล้ว

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

เรียก $\det A$ ว่า ดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 2

1 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ วิธีทำ จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$$= (3 \times 4) - (1 \times 2)$$

$$= 12 - 2$$

$$\det A = 10$$

2 $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ วิธีทำ จะได้ $\det B = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$$= ((-3) \times 4) - (1 \times 2)$$

$$= -12 - 2$$

$$\det B = -14$$

3 $C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ วิธีทำ จะได้ $\det C = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$$= ((-4) \times 0) - ((-5) \times 2)$$

$$= 0 - (-10)$$

$$\det C = 10$$

นั่นคือ ถ้า กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 แล้ว

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} - & - & - \\ + & + & + \end{matrix}$$

$$= (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32})$$

$$- (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$

$$\det A = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32})$$

$$- (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$

๒. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์อีกวิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยมใช้กันโดยทั่วไป คือ วิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ ซึ่งสามารถใช้ได้กับดีเทอร์มิแนนต์อันดับสองขึ้นไป และจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับไมเนอร์ (Minor) และโคแฟกเตอร์ (Cofactor) ก่อน ดังนี้

๒.๑ ไมเนอร์ (Minor)

ไมเนอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของดีเทอร์มิแนนต์ที่เกิดจากการตัดสมาชิกแถวที่ i และหลักที่ j ออกจากเมทริกซ์จัตุรัส A เขียนแทนด้วย M_{ij} อ่านว่า ไมเนอร์ของ a_{ij}

๒.๒ โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของ M_{ij} ที่มีเครื่องหมายเป็นบวก หรือลบ โดยการนำเอา $(-1)^{i+j}$ ยกกำลังแถวที่ i รวมกับหลักที่ j เขียนแทนด้วย C_{ij} อ่านว่า โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} นั่นคือ

$$\begin{aligned} 3 \quad C_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\{0 - (-3)\} \\ C_{12} &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad C_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot M_{23} \\ &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(4 - 12) \\ &= (-1)(-8) \\ C_{23} &= 8 \end{aligned}$$



จากการสังเกต

จาก $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
ถ้า $i+j$ = เป็นเลขคู่
ถ้า $i+j$ = เป็นเลขคี่

จะได้ $C_{ij} = M_{ij}$
จะได้ $C_{ij} = -M_{ij}$

๖. แบบฝึกหัด/แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ขึ้นหน้าใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ฯ)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๗	หน่วยที่ ... ๗
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๖-๑๗
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ดีเทอร์มิแนนต์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์		

เฉลย คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
หน่วยการเรียนรู้ที่ ๗ ดีเทอร์มิแนนต์

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ ๗

๑. ตอบ ง.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4 \times 2) - (3 \times 1) \\ = (-8) - (3) \\ = -11$$

๒. ตอบ ก.

$$\begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-2 \times 2) - (-5 \times x) \\ = -4 + 5x$$

$$\text{จาก } \begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{จะได้ } -4 + 5x = 1$$

$$5x = 1 + 4$$

$$5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5}$$

$$x = 1$$

๓. ตอบ ก.

$$\begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -4x + 5x$$

$$\text{จาก } \begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{จะได้ } -4 + 5x = 1$$

$$x = 1$$

๔. ตอบ ค.

$$\begin{vmatrix} 3x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6x - 0 = 6x$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 = 12$$

จาก $\begin{vmatrix} 3x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

จะได้ $6x = 12$

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

๕. ตอบ ง.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 0 + 12$$

$$= (2 + 0 + 12) - (-4 + 0 + (-4))$$

$$= 14 - (-8)$$

$$= 14 + 8$$

$$= 22$$



แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง
 โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำจริงจั่งต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จักฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ ทรัพย์สินสิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชี รายรับ-รายจ่ายของตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อ วิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช้เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและ ปฏิบัติเต็มที่ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและ กาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกัน ยังคงมีความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อม ถูกต้องตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกาย ใจและ สภาพแวดล้อม มีความผ่องใสเป็นที่เจริญตาแก่ผู้พบเห็น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของ ผู้อื่น รับผิดชอบต่อตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวม พลังช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและจัดการความ ขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมทั้งจะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มี ความเดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วม สร้างสรรค์สิ่งดีงามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ

28-30 คะแนน = ดีมาก 15-19 คะแนน = ควรปรับปรุง
 25-27 คะแนน = ดี 0-14 คะแนน = ใช้ไม่ได้
 20-24 คะแนน = พอใช้

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
	๕	๔	๓	๒	๑
๑.ผลการเรียนที่คาดหวังมีความชัดเจน ครอบคลุมพฤติกรรมทุกด้าน (KAP)					
๒.เนื้อหาสาระมีความถูกต้อง ครอบคลุม และชัดเจน					
๓.กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๔.กิจกรรมการเรียนรู้มีความหลากหลาย น่าสนใจและเน้นกระบวนการคิด การฟัง การพูด การอ่าน การดูและการเขียน					
๕.กิจกรรมการเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง					
๖.กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง					
๗.กิจกรรมการเรียนรู้เพียงพอที่จะส่งผลให้บรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๘.กิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดสามารถนำไปสู่ปฏิบัติการสอนได้จริง					
๙.มีสื่อที่สอดคล้องกับกิจกรรมและเป็นสื่อที่เน้นกระบวนการคิด					
๑๐.มีการวัดผลประเมินผลที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๑๑.วิธีการวัดผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้					
๑๒.มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินผลไว้อย่างชัดเจนและเหมาะสม					
รวม					

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม

๑.กระบวนการคิดที่ใช้ คือ.....

.....

๒.สิ่งที่ควรปรับปรุง คือ.....

.....

ผู้ประเมิน.....

บันทึกหลังการสอน

ข้อสรุปหลังการสอน

ปัญหาที่พบ

แนวทางแก้ปัญหา

	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๕
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๒-๑๓
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ เมทริกซ์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง/งาน เมทริกซ์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

1. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์
2. ชนิดของเมทริกซ์

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....สมรรถนะย่อย.....

- ๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน....
- ๒) วิธีประเมิน.....
- ๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)
- ๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาผลลัพธ์ของการดำเนินการของเมทริกซ์ และนำไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. บอกความหมายของเมทริกซ์ได้
2. บอกสัญลักษณ์ของเมทริกซ์ได้
3. บอกชนิดของเมทริกซ์ได้

๕. สารการเรียนรู้

3. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์
4. ชนิดของเมทริกซ์

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูใช้เทคนิคการสอนแบบซิปปาโมเดล (CIPPA MODEL) โดยการทบทวนความรู้เดิมจากสัปดาห์ที่ผ่านมา โดยดึงความรู้เดิมของผู้เรียนในเรื่องที่จะเรียน เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความพร้อมในการเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้เดิมของตน ผู้สอนใช้การสนทนาซักถามให้ผู้เรียนเล่าประสบการณ์เดิม
2. ครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อทดสอบความรู้พื้นฐาน
3. จากนั้นครูอภิปรายเรื่องเมทริกซ์ว่าเป็นเรื่องที่สำคัญเรื่องหนึ่งในการศึกษาคณิตศาสตร์ เมทริกซ์เป็นเครื่องมือ

สำคัญในการแก้ปัญหาทางวิชาชีพ และชีวิตประจำวัน ซึ่งปกติในชีวิตประจำวันของเรามักจะได้พบเห็นหรือเกี่ยวข้องกับเมทริกซ์อยู่เสมอ เพียงแต่ไม่ได้เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเมทริกซ์ เช่น การบันทึกข้อมูลจากการขายสินค้า ประเภทเครื่องใช้ไฟฟ้า

เช่น

ทีม \ ผลการแข่งขัน	ชนะ	เสมอ	แพ้
ก.	1	1	1
ข.	1	2	0
ค.	0	0	3
ง.	2	1	0

ถ้าเรานำเฉพาะตัวเลขมาเขียนในรูปวงเล็บ [] หรือ () จะเรียกว่า **เมทริกซ์** ซึ่งจะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอน

4. ครูอธิบายความหมายของเมทริกซ์โดยกล่าวว่าเมทริกซ์ (Matrix) หมายถึง กลุ่มของจำนวนใด ๆ ที่นำมาเขียนเรียงกันเป็นแถว และหลักในจำนวนที่เท่ากัน เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยมีเครื่องหมายวงเล็บเล็ก () หรือวงเล็บใหญ่ [] ล้อมรอบจำนวนเหล่านั้น เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5. ครูแสดงสัญลักษณ์ของเมทริกซ์ให้ผู้เรียนดู ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

← แถวที่ 1
← แถวที่ 2
← แถวที่ 3
⋮
← แถวที่ m

อธิบายได้ดังนี้

- ชื่อของเมทริกซ์ □ โดยทั่วไปนิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ...
- แถว (Row) ของเมทริกซ์ นับตามแนวนอน จากบนลงล่าง
- หลัก (Column) ของเมทริกซ์ นับตามแนวตั้ง จากซ้ายไปขวา

4. สมาชิก (Element) ของเมทริกซ์ คือจำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ ซึ่งนิยมเขียนแทนด้วย อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น a_{11}, a_{12}, a_{23} เป็นต้น เมื่อกำหนดให้ตัวเลขที่กำกับ สมาชิกแต่ละตัวแสดงถึง เลขตัวหน้าคือแถว เลขตัวหลังคือหลัก เช่น

a_{12} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 1 และหลักที่ 2

a_{23} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 2 และหลักที่ 3

ในกรณีทั่วไปจะใช้ a_{ij} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j

5. ขนาด หรือมิติของเมทริกซ์ เขียนแสดงโดยใช้จำนวนแถวคูณกับจำนวนหลัก เช่น ขนาดของเมทริกซ์ A เท่ากับ $m \times n$ อาจเขียนเป็น $A_{m \times n}$ หรือ $A = [a_{ij}]_{(m \times n)}$ เมื่อ m คือ จำนวนแถว และ n คือ จำนวนหลัก
6. ครบถ้วนอย่างประกอบเพื่อให้นักเรียนเข้าใจมากขึ้น
- ตัวอย่างที่

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ -4 & 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ จงหา

- 1 ขนาด หรือมิติของ A
- 2 สมาชิกในแถวที่ 2
- 3 สมาชิกในหลักที่ 3
- 4 สมาชิกในตำแหน่ง $a_{11}, a_{23}, a_{32}, a_{34}$ และ a_{43}

วิธีทำ

- 1 ขนาด หรือมิติของ A คือ 3×4
- 2 สมาชิกในแถวที่ 2 คือ $-2, 0, 3$ และ 5
- 3 สมาชิกในหลักที่ 3 คือ $0, 3$ และ -8
- 4 สมาชิกในตำแหน่ง a_{11} คือ $2, a_{23}$ คือ $3, a_{32}$ คือ $7, a_{34}$ คือ 9 และ a_{43} ไม่มี เพราะไม่มีแถวที่ 4

๗. ครูกล่าวถึงชนิดของเมทริกซ์ให้ผู้เรียนฟังว่า ชนิดของเมทริกซ์ สามารถแบ่งได้ตามลักษณะของเมทริกซ์ได้ ดังนี้

๗.๑ เมทริกซ์แถว (Row matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีแถวเพียงแถวเดียว

๗.๒ เมทริกซ์หลัก (Column matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีหลักเพียงหลักเดียว

๗.๓ เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ O

๗.๔ เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน ซึ่งเมทริกซ์จัตุรัส จะมีเส้นทแยงมุมที่ลากจากมุมบนซ้ายลงมาสู่มุมล่างขวา เรียกว่า **เส้นทแยงมุมหลัก**

๗.๕ เมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียง (Diagonal matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ส่วนสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักจะมีค่าเท่าใดก็ได้

๗.๖ เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix) คือเมทริกซ์เฉียงที่มีสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลัก มีค่าเท่ากันทั้งหมด

๗.๗ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น ๑ ทั้งหมดและสมาชิกตัวอื่น ๆ เป็น ๐ ทั้งหมด เขียนแทนด้วย I_n

๗.๘ เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

๗.๙ เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

ครูให้ผู้เรียนศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับเมทริกซ์ที่ได้เรียนรู้ไป

ขั้นสรุปและการประยุกต์

๑. จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความคิดรวบยอดเกี่ยวกับพื้นฐานของเมทริกซ์

การวัดผลและประเมินผล

ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา

๒) ทดสอบก่อนเรียน

ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ

ต่องานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม

หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Point

๓. กิจกรรมการเรียนการสอน

๔. รูปภาพประกอบ

๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

๘.๑ หลักฐานความรู้

๑. บันทึกการสอน

๒. ใบเช็กรายชื่อ

๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน

๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน

๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

๒. ตรวจกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้

๓. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๒ วิธีการประเมิน

๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๓ เครื่องมือประเมิน

๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง

๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา



	ใบความรู้ ที่ ๕	หน่วยที่ ...๕
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๒-๑๓
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ เมทริกซ์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง เมทริกซ์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

เมทริกซ์ เป็นกลุ่มของจำนวนใด ๆ ที่นำมาเขียนเรียงกันเป็นแถวและหลักในจำนวนที่เท่ากัน ในรูปสี่เหลี่ยม มุมฉาก โดยมีเครื่องหมายวงเล็บเล็ก () หรือวงเล็บใหญ่ [] ล้อมรอบจำนวนเหล่านั้น เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อจะต้องมีขนาดหรือมิติเท่ากัน และจะต้องมีสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกคู่

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาผลลัพธ์ของการดำเนินการของเมทริกซ์ และนำไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

- บอกความหมายของเมทริกซ์ได้
- บอกสัญลักษณ์ของเมทริกซ์ได้
- บอกชนิดของเมทริกซ์ได้

๕. เนื้อหาสาระ๑. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

เมทริกซ์ (Matrix) หมายถึง กลุ่มของจำนวนใด ๆ ที่นำมาเขียนให้เป็นแถว (row) และให้เป็นหลัก (Column) แต่ละแถวมีจำนวนหลักเท่ากัน โดยมีเครื่องหมายวงเล็บเล็ก () หรือวงเล็บใหญ่ [] ล้อมรอบจำนวนเหล่านั้น

เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

๑.๒ สัญลักษณ์ของเมทริกซ์

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วย m แถว และ n หลัก จะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{c}
 \text{หลักที่} \\
 \begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & \dots & n \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}
 \end{bmatrix}
 & \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{แถวที่ 1} \\
 \leftarrow \text{แถวที่ 2} \\
 \leftarrow \text{แถวที่ 3} \\
 \leftarrow \vdots \\
 \leftarrow \text{แถวที่ m}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

อธิบายได้ดังนี้

ชื่อของเมทริกซ์ โดยทั่วไปนิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ...

แถว (Row) ของเมทริกซ์ นับตามแนวนอน จากบนลงล่าง

หลัก (Column) ของเมทริกซ์ นับตามแนวตั้ง จากซ้ายไปขวา

สมาชิก (Element) ของเมทริกซ์ คือจำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ซึ่งนิยมเขียนแทนด้วย อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น a_{11} , a_{12} , a_{13} เป็นต้น เมื่อกำหนดให้ตัวเลขที่กำกับสมาชิกแต่ละตัวแสดงถึง เลขตัวหน้าคือแถว เลขตัวหลังคือหลัก เช่น

a_{12} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 1 และหลักที่ 2

a_{23} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 2 และหลักที่ 3

ในกรณีทั่วไปจะใช้ a_{ij} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j

ขนาด หรือมิติของเมทริกซ์ เขียนแสดงโดยใช้จำนวนแถวคูณกับจำนวนหลัก เช่น ขนาดของเมทริกซ์ A เท่ากับ $m \times n$ อาจเขียนเป็น $A_{m \times n}$ หรือ $A = [a_{ij}] (m \times n)$ เมื่อ m คือ จำนวนแถว และ n คือ จำนวนหลัก

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ -4 & 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

จงหา ① ขนาด หรือมิติของ A

② สมาชิกในแถวที่ 2

③ สมาชิกในหลักที่ 3

④ สมาชิกในตำแหน่ง a_{11} , a_{23} , a_{32} , a_{34} และ a_{43}

วิธีทำ

① ขนาด หรือมิติของ A คือ 3×4

② สมาชิกในแถวที่ 2 คือ $-2, 0, 3$ และ 5

③ สมาชิกในหลักที่ 3 คือ $0, 3$ และ -8

④ สมาชิกในตำแหน่ง a_{11} คือ 2 , a_{23} คือ 3 , a_{32} คือ 7 , a_{34} คือ 9 และ a_{43} ไม่มีเพราะไม่มีแถวที่ 4

๒. ชนิดของเมทริกซ์

ชนิดของเมทริกซ์ สามารถแบ่งได้ตามลักษณะของเมทริกซ์ได้ดังนี้

1. เมทริกซ์แถว (Row matrix)
2. เมทริกซ์หลัก (Column matrix)
3. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)
4. เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix)
5. เมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียง (Diagonal matrix)
6. เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix)
7. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)
8. เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix)
9. เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular matrix)

1. เมทริกซ์แถว (Row matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีแถวเพียงแถวเดียว เช่น $[2 \ -0 \ 1 \ 3]$

2. เมทริกซ์หลัก (Column matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีหลักเพียงหลักเดียว เช่น $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 0 เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน เช่น $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $[1]$ ซึ่งเมทริกซ์จัตุรัส จะมีเส้นทแยงมุมที่ลากจากมุมบนซ้ายลงมาสู่มุมล่างขวา เรียกว่า เส้นทแยงมุมหลัก

นั่นคือ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ เส้นทแยงมุมหลัก

มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก คือ $-2, 7$ และ 6

5. เมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียง (Diagonal matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ส่วนสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักจะมีค่าเท่าใดก็ได้

เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix) คือเมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียงที่มีสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทั้งหมด

7. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 ทั้งหมดและสมาชิกตัวอื่น ๆ เป็น 0 ทั้งหมด เขียนแทนด้วย I_n

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9. เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

๖. แบบฝึกหัด/แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ขึ้นหน้าใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ๖)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๕	หน่วยที่ ... ๕
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๒-๑๓
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ เมทริกซ์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง เมทริกซ์		

เฉลย คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๕ เมทริกซ์

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ ๕

1. ตอบ ก. A มีมิติ 2×3

วิธีทำ จาก $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

จะเห็นว่า $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มิติ 3×2

มี $a_{11} = -3$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -4$, $a_{22} = 0$

$a_{31} = 1$ และ $a_{32} = -1$

ดังนั้น ข้อ ก. A มีมิติ 2×3 กล่าวผิด

2. ตอบ ข.

หลักที่

1	2	...	n	
↓	↓		↓	

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

← แถวที่ 1
← แถวที่ 2
⋮
← แถวที่ m

วิธีทำ จากโจทย์ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

พิจารณา ก. ผิด เนื่องจาก สมาชิกในแถวที่ 1 คือ 1, 0, -1

ข. ถูกต้อง เนื่องจาก สมาชิกในแถวที่ 2 คือ -2, 3, -4

ค. ผิด เนื่องจาก สมาชิกในหลักที่ 2 คือ 0, 3, -5

ง. ผิด เนื่องจาก $a_{21} = 3$

3. ตอบ ก.

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้ $C' = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. ตอบ ก.

กำหนด $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & y \end{bmatrix}$

จะได้ $x = -2$ และ $y = -1$

ดังนั้น $x - y = -2 - (-1) = -1$

5. ตอบ ง.

กำหนด $\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ z+7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y-1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $2x = 0$

$$x = 0$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

และ $z + 7 = 5$

$$z = 5 - 7$$

$$= -2$$

ดังนั้น x , y และ z คือ 0, 1 และ -2 ตามลำดับ

แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง
 โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำจริงจั่งต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จักฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ ทรัพย์สินสิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชี รายรับ-รายจ่ายของตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อ วิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช้เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและ ปฏิบัติเต็มที่ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและ กาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกัน ยังคงมีความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อม ถูกต้องตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกาย ใจและ สภาพแวดล้อม มีความผ่องใสเป็นที่เจริญตาแก่ผู้พบเห็น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของ ผู้อื่น รับผิดชอบต่อตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวม พลังช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและจัดการความ ขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมทั้งจะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มี ความเดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วม สร้างสรรค์สิ่งดีงามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ			
28-30 คะแนน =	ดีมาก	15-19 คะแนน =	ควรปรับปรุง
25-27 คะแนน =	ดี	0-14 คะแนน =	ใช้ไม่ได้
20-24 คะแนน =	พอใช้		

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
	๕	๔	๓	๒	๑
๑.ผลการเรียนที่คาดหวังมีความชัดเจน ครอบคลุมพฤติกรรมทุกด้าน (KAP)					
๒.เนื้อหาสาระมีความถูกต้อง ครอบคลุม และชัดเจน					
๓.กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๔.กิจกรรมการเรียนรู้มีความหลากหลาย น่าสนใจและเน้นกระบวนการคิด การฟัง การพูด การอ่าน การดูและการเขียน					
๕.กิจกรรมการเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง					
๖.กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง					
๗.กิจกรรมการเรียนรู้เพียงพอที่จะส่งผลให้บรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๘.กิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดสามารถนำไปสู่ปฏิบัติการสอนได้จริง					
๙.มีสื่อที่สอดคล้องกับกิจกรรมและเป็นสื่อที่เน้นกระบวนการคิด					
๑๐.มีการวัดผลประเมินผลที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๑๑.วิธีการวัดผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้					
๑๒.มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินผลไว้อย่างชัดเจนและเหมาะสม					
รวม					

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม

๑.กระบวนการคิดที่ใช้ คือ.....

.....

๒.สิ่งที่ควรปรับปรุง คือ.....

.....

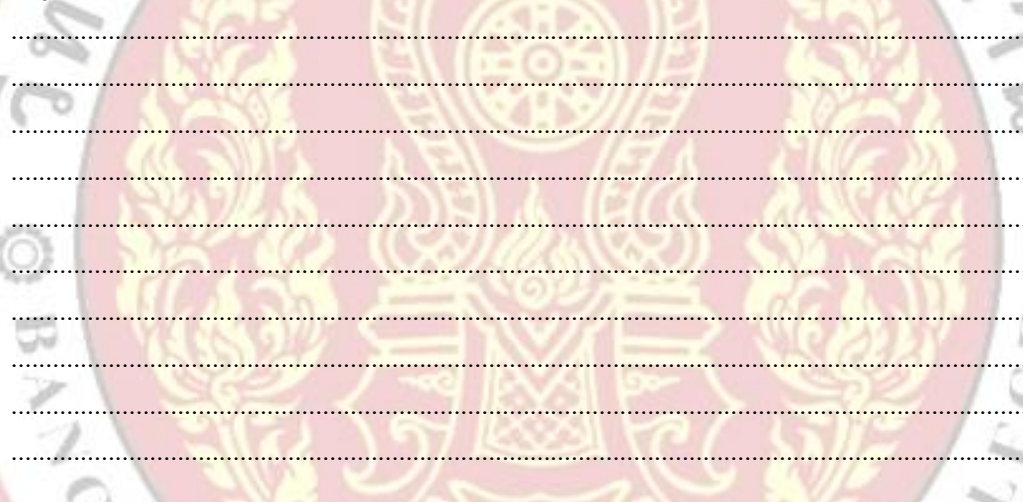
ผู้ประเมิน.....

บันทึกหลังการสอน

ข้อสรุปหลังการสอน

วิทยาลัยเทคนิคบางสะพาน

ปัญหาที่พบ



แนวทางแก้ปัญหา



	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๖
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๔-๑๕
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ การคูณเมทริกซ์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง/งาน การคูณเมทริกซ์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

๑. การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว
๒. สมบัติการบวกของเมทริกซ์
๓. การประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในงานอาชีพและชีวิตประจำวัน

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....-.....สมรรถนะย่อย.....-.....

- ๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน...-
- ๒) วิธีประเมิน.....-.....
- ๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)
- ๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาผลลัพธ์ของการดำเนินการของเมทริกซ์ และนำไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวัน

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

๑. คูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัวได้
๒. คูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้
๓. นำความรู้เรื่องเมทริกซ์ไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๕. สารการเรียนรู้

๔. การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว
๕. สมบัติการบวกของเมทริกซ์
๖. การประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในงานอาชีพและชีวิตประจำวัน

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูใช้เทคนิคการสอนแบบซิปปาโมเดล (CIPPA MODEL) โดยการทบทวนความรู้เดิมจากสัปดาห์ที่ผ่านมา โดยดึงความรู้เดิมของผู้เรียนในเรื่องที่จะเรียน เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความพร้อมในการเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้เดิมของตน ผู้สอนใช้การสนทนาซักถามให้ผู้เรียนเล่าประสบการณ์เดิม
2. จากนั้นครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน จากนั้นครูเริ่มอธิบายเนื้อหาเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์จะมีการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัวว่าการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว เป็นการนำเอาค่าคงตัวคูณกับ

สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์และผลลัพธ์ ของการคูณจะเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่าเดิม

นิยามของการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

4. ครรูกตัวอย่างการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ $3A$, $-2B$ และ $3A + 2B$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 3A &= 3 \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(-3) & 3(3) \\ 3(1) & 3(-1) \end{bmatrix} \\ 3A &= \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \\ \textcircled{2} \quad -2B &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2(3) & -2(2) & -2(-2) \\ -2(0) & -2(-1) & -2(1) \end{bmatrix} \\ -2B &= \begin{bmatrix} -6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ \textcircled{3} \quad 3A + 2B & \end{aligned}$$

ไม่สามารถบวกกันได้ เพราะเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติไม่เท่ากัน

5. จากนั้นครูเริ่มอธิบายเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ โดยมีนิยามดังนี้

นิยามของการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

กำหนดให้เมทริกซ์ A มีมิติ $m \times p$ และเมทริกซ์ B มีมิติ $p \times n$ ผลคูณของ $AB = C$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ ที่มีมิติ $m \times n$ โดยที่

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, m$

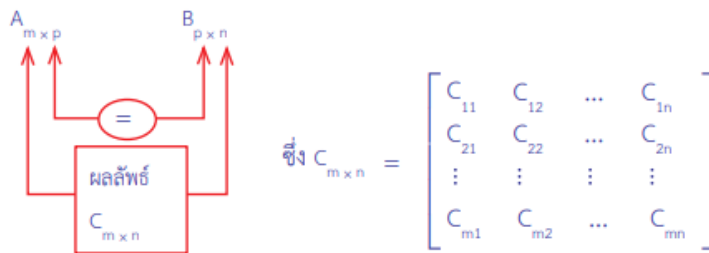
และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$

6. ครูกล่าวถึงข้อสังเกตของการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ว่า

7. จากนั้นครูยกตัวอย่างคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1

- 1 A จะคูณกับ B ได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A ต้องเท่ากับจำนวนแถวของ B
- 2 ผลลัพธ์ของ AB จะมีมิติเท่ากับจำนวนแถวของ A คูณกับจำนวนหลักของ B แสดงภาพได้ดังนี้



- 3 การดำเนินการคูณ

เช่น C_{11} เกิดจากการนำสมาชิกในแถวที่ 1 ของ A คูณกับสมาชิกในหลักที่ 1 ของ B เป็นคู่ ๆ แล้วนำมาบวกกันเป็นสมาชิกในตำแหน่ง C_{11}

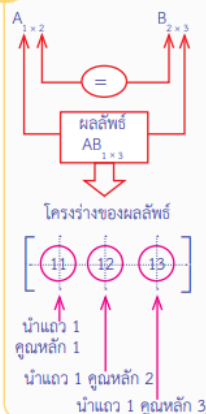
C_{12} เกิดจากการนำสมาชิกในแถวที่ 1 ของ A คูณกับสมาชิกในหลักที่ 2 ของ B เป็นคู่ ๆ แล้วนำมาบวกกันเป็นสมาชิกในตำแหน่ง C_{12} เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ จงหา AB



ช่วยคุณคิด



วิธีทำ

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 \times 3) + (2 \times 6) & (1 \times 4) + (2 \times 7) & (1 \times 5) + (2 \times 8) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 + 12 & 4 + 14 & 5 + 16 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 15 & 18 & 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

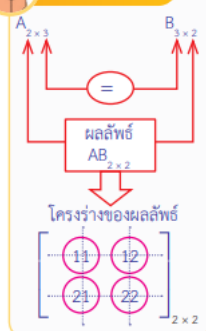
กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีทำ

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} (1 \times 6) + (2 \times 5) + (3 \times 4) & (1 \times 3) + (2 \times 2) + (3 \times 1) \\ (4 \times 6) + (5 \times 5) + (6 \times 4) & (4 \times 3) + (5 \times 2) + (6 \times 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 + 10 + 12 & 3 + 4 + 3 \\ 24 + 25 + 24 & 12 + 10 + 6 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 28 & 10 \\ 73 & 28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



ช่วยคุณคิด



ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา AB , BA , AC

วิธีทำ

① หา AB

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+3 & -2+4 \\ 0-6 & 0-8 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

② หา BA

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+0 & 1-2 \\ 6+0 & 3-8 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

③ หา AC

$$\begin{aligned} AC &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4-1 & 0+3 \\ 0+2 & 0-6 \end{bmatrix} \\ AC &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8. ครุยักตัวอย่างการประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในงานอาชีพ และชีวิตประจำวัน

จากการแข่งขันฟุตบอล มีผลการแข่งขันดังนี้

ทีม \ ผลการแข่งขัน	ชนะ	เสมอ	แพ้
ก.	1	1	1
ข.	1	2	0
ค.	0	0	3
ง.	2	1	0

มีการกำหนดคะแนนและเงินรางวัลของผลการแข่งขันเพื่อหาทีมฟุตบอลที่จะครองถ้วยชนะเลิศ ดังนี้

ผลการแข่งขัน	คะแนน	เงินรางวัล
ชนะ	2	2,000
เสมอ	1	1,000
แพ้	0	0

จงหาว่า แต่ละทีมจะได้คะแนนรวมและเงินรางวัลเท่าใด

วิธีทำ

$$\text{จะได้} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2,000 \\ 1 & 1,000 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 0) & (1 \times 2,000) + (1 \times 1,000) + (1 \times 0) \\ (1 \times 2) + (2 \times 1) + (0 \times 0) & (1 \times 2,000) + (2 \times 1,000) + (0 \times 0) \\ (0 \times 2) + (0 \times 1) + (3 \times 0) & (0 \times 2,000) + (0 \times 1,000) + (3 \times 0) \\ (2 \times 2) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (2 \times 2,000) + (1 \times 1,000) + (0 \times 0) \end{bmatrix}$$

		คะแนน				เงินรางวัล					
		ชนะ	เสมอ	แพ้		ชนะ	เสมอ	แพ้			
ทีม ก.		2	+	1	+	0	2,000	+	1,000	+	0
ทีม ข.		2	+	2	+	0	2,000	+	2,000	+	0
ทีม ค.		0	+	0	+	0	0	+	0	+	0
ทีม ง.		4	+	1	+	0	4,000	+	1,000	+	0

		คะแนน		เงินรางวัล
ทีม ก.		3		3,000
ทีม ข.		4		4,000
ทีม ค.		0		0
ทีม ง.		5		5,000

ดังนั้น ทีม ก, ข, ค และ ง จะได้คะแนนรวม 3, 4, 0 และ 5 ตามลำดับ และจะได้เงินรางวัล 3,000, 4,000, 0 และ 5,000 บาท ตามลำดับ

9. ครูและผู้เรียนร่วมกันทำแบบฝึกทักษะ

ขั้นสรุปและการประยุกต์

10. จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยการตอบคำถาม

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย AB ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของเมทริกซ์ A เท่ากับ จำนวนแถวของเมทริกซ์ B และผลคูณที่ได้จะเป็นเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ A และมีจำนวน หลักเท่ากับจำนวนหลักของเมทริกซ์ B

11. ครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนท้ายหน่วยที่ 6

การวัดผลและประเมินผล

ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา

๒) ทดสอบก่อนเรียน

ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ

ต่องานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม

หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Point
๓. กิจกรรมการเรียนการสอน
๔. รูปภาพประกอบ
๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

๘.๑ หลักฐานความรู้

๑. บันทึกการสอน
๒. ใบเช็กรายชื่อ

๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน

๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน

๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. ตรวจกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้
๓. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๒ วิธีประเมิน

๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๓ เครื่องมือประเมิน

๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา

	ใบความรู้ ที่ ๒	หน่วยที่ ...๒.
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๔-๑๕
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ การคูณเมทริกซ์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง การคูณเมทริกซ์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว เป็นการนำเอาค่าคงตัวคูณกับสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์และผลลัพธ์ของการคูณจะเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่าเดิม

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ เป็นการนำเอาสมาชิกในแถวของเมทริกซ์ตัวตั้งไปคูณกับสมาชิกในหลัก ของเมทริกซ์ตัวคูณ โดยที่เมทริกซ์ที่จะคูณกันได้นั้น จำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวตั้งจะต้องเท่ากับจำนวนแถว ของเมทริกซ์ตัวคูณ

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

หาผลลัพธ์ของการดำเนินการของเมทริกซ์ และนำไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. บอกความหมายของเมทริกซ์ได้
2. บอกสัญลักษณ์ของเมทริกซ์ได้
3. บอกชนิดของเมทริกซ์ได้

๕. เนื้อหาสาระ๑. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

เมทริกซ์ (Matrix) หมายถึง กลุ่มของจำนวนใด ๆ ที่นำมาเขียนให้เป็นแถว (row) และให้เป็นหลัก (Column) แต่ละแถวมีจำนวนหลักเท่ากัน โดยมีเครื่องหมายวงเล็บเล็ก () หรือวงเล็บใหญ่ [] ล้อมรอบจำนวนเหล่านั้น

เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

๑.๒ สัญลักษณ์ของเมทริกซ์

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วย m แถว และ n หลัก จะเขียนได้ดังนี้

หลักที่ 1 2 3 00... n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

แถวที่ 1
แถวที่ 2
แถวที่ 3
:
แถวที่ m

อธิบายได้ดังนี้

ชื่อของเมทริกซ์ โดยทั่วไปนิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ...

แถว (Row) ของเมทริกซ์ นับตามแนวนอน จากบนลงล่าง

หลัก (Column) ของเมทริกซ์ นับตามแนวตั้ง จากซ้ายไปขวา

สมาชิก (Element) ของเมทริกซ์ คือจำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ซึ่งนิยมเขียนแทนด้วย อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น a_{11} , a_{12} , a_{23} เป็นต้น เมื่อกำหนดให้ตัวเลขที่กำกับสมาชิกแต่ละตัวแสดงถึง เลขตัวหน้าคือแถว เลขตัวหลังคือหลัก เช่น

a_{12} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 1 และหลักที่ 2

a_{23} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 2 และหลักที่ 3

ในกรณีทั่วไปจะใช้ a_{ij} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j

ขนาด หรือมิติของเมทริกซ์ เขียนแสดงโดยใช้จำนวนแถวคูณกับจำนวนหลัก เช่น ขนาดของเมทริกซ์ A เท่ากับ $m \times n$ อาจเขียนเป็น $A_{m \times n}$ หรือ $A = [a_{ij}] (m \times n)$ เมื่อ m คือ จำนวนแถว และ n คือ จำนวนหลัก

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ -4 & 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

จงหา ① ขนาด หรือมิติของ A

② สมาชิกในแถวที่ 2

③ สมาชิกในหลักที่ 3

④ สมาชิกในตำแหน่ง a_{11} , a_{23} , a_{32} , a_{34} และ a_{43}

วิธีทำ

① ขนาด หรือมิติของ A คือ 3×4

② สมาชิกในแถวที่ 2 คือ $-2, 0, 3$ และ 5

③ สมาชิกในหลักที่ 3 คือ $0, 3$ และ -8

④ สมาชิกในตำแหน่ง a_{11} คือ 2 , a_{23} คือ 3 , a_{32} คือ 7 , a_{34} คือ 9 และ a_{43} ไม่มีเพราะไม่มีแถวที่ 4

๒. ชนิดของเมทริกซ์

ชนิดของเมทริกซ์ สามารถแบ่งได้ตามลักษณะของเมทริกซ์ได้ดังนี้

1. เมทริกซ์แถว (Row matrix)
2. เมทริกซ์หลัก (Column matrix)
3. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)
4. เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix)
5. เมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียง (Diagonal matrix)
6. เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix)
7. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)
8. เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix)
9. เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular matrix)

1. เมทริกซ์แถว (Row matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีแถวเพียงแถวเดียว เช่น $[2 \ -0 \ 1 \ 3]$

2. เมทริกซ์หลัก (Column matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีหลักเพียงหลักเดียว เช่น $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 0 เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน เช่น $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $[1]$ ซึ่งเมทริกซ์จัตุรัส จะมีเส้นทแยงมุมที่ลากจากมุมบนซ้ายลงมาสู่มุมล่างขวา เรียกว่า เส้นทแยงมุมหลัก

นั่นคือ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ เส้นทแยงมุมหลัก

มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก คือ $-2, 7$ และ 6

5. เมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียง (Diagonal matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ส่วนสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักจะมีค่าเท่าใดก็ได้

เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix) คือเมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียงที่มีสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทั้งหมด

7. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 ทั้งหมด และสมาชิกตัวอื่น ๆ เป็น 0 ทั้งหมด เขียนแทนด้วย I_n

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9. เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

๖. แบบฝึกหัด/แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ขึ้นหน้าใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ฯ)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๒	หน่วยที่ ... ๒
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๔-๑๕
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ การคูณเมทริกซ์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง การคูณเมทริกซ์		

เฉลย คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๔ การคูณเมทริกซ์

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ 6

1. ตอบ ง.

การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว เป็นการนำเอาค่าคงตัวคูณกับสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ และผลลัพธ์ของการคูณเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่าเดิม

2. ตอบ ข.

เมทริกซ์ A คูณ เมทริกซ์ B ได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของเมทริกซ์ A ต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B

3. ตอบ ค.

$$A_4 \times 3 \quad B_3 \times 3 = C_{4 \times 3}$$

↑ ↑
เท่ากัน
ผลลัพธ์

4. ตอบ ค.

$$\begin{aligned}
 5D &= 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= 5 \begin{bmatrix} 5(0) & 5(1) & 5(0) \\ 5(2) & 5(-2) & 5(3) \end{bmatrix} \\
 5D &= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 10 & -10 & 15 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5. ตอบ ก.

$$\begin{aligned}
 3A &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3(1) & 3(0) \\ 3(3) & 3(2) \end{bmatrix} \\
 3A &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$3A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2 & 0+4 \\ 9+(-1) & 6+1 \end{bmatrix}$$

$$3A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$



แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง
 โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำจริงจั่งต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จักฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ ทรัพย์สินสิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชี รายรับ-รายจ่ายของตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อ วิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช้เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและ ปฏิบัติเต็มที่ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและ กาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกัน ยังคงมีความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อม ถูกต้องตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกาย ใจและ สภาพแวดล้อม มีความพอใจเป็นที่ยอมรับจากผู้อื่น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของ ผู้อื่น รับผิดชอบต่อตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวม พลังช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและจัดการความ ขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมทั้งจะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มี ความเดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วม สร้างสรรค์สิ่งดีงามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ			
28-30 คะแนน =	ดีมาก	15-19 คะแนน =	ควรปรับปรุง
25-27 คะแนน =	ดี	0-14 คะแนน =	ใช้ไม่ได้
20-24 คะแนน =	พอใช้		

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
	๕	๔	๓	๒	๑
๑.ผลการเรียนที่คาดหวังมีความชัดเจน ครอบคลุมพฤติกรรมทุกด้าน (KAP)					
๒.เนื้อหาสาระมีความถูกต้อง ครอบคลุม และชัดเจน					
๓.กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๔.กิจกรรมการเรียนรู้มีความหลากหลาย น่าสนใจและเน้นกระบวนการคิด การฟัง การพูด การอ่าน การดูและการเขียน					
๕.กิจกรรมการเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง					
๖.กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง					
๗.กิจกรรมการเรียนรู้เพียงพอที่จะส่งผลให้บรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๘.กิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดสามารถนำไปสู่ปฏิบัติการสอนได้จริง					
๙.มีสื่อที่สอดคล้องกับกิจกรรมและเป็นสื่อที่เน้นกระบวนการคิด					
๑๐.มีการวัดผลประเมินผลที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๑๑.วิธีการวัดผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้					
๑๒.มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินผลไว้อย่างชัดเจนและเหมาะสม					
รวม					

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม

๑.กระบวนการคิดที่ใช้ คือ.....

.....

๒.สิ่งที่ควรปรับปรุง คือ.....

.....

ผู้ประเมิน.....

บันทึกหลังการสอน

ข้อสรุปหลังการสอน

ปัญหาที่พบ

แนวทางแก้ปัญหา

	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๗
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๖-๑๗
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ดีเทอร์มิแนนต์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง/งาน ดีเทอร์มิแนนต์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

๑. ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง
๒. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์
๓. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....-.....สมรรถนะย่อย.....-.....

๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน...-

๒) วิธีประเมิน.....-.....

๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)

๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดไม่เกิน 3×3 และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

๑. บอกความหมายของดีเทอร์มิแนนต์ได้
๒. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยงได้
๓. หาไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ได้
๔. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้
๕. นำความรู้เรื่องสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์มาใช้ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้
๖. นำความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๕. สารการเรียนรู้

๔. ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง
๕. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์
๖. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูใช้เทคนิคการสอนแบบซิปปาโมเดล (CIPPA MODEL) โดยการทบทวนความรู้เดิมจากสัปดาห์ที่ผ่านมา โดย
ดึงความรู้เดิมของผู้เรียนในเรื่องที่จะเรียน เพื่อช่วยให้ผู้เรียนมีความพร้อมในการเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้เดิม
ของตน ผู้สอนใช้การสนทนาซักถามให้ผู้เรียนเล่าประสบการณ์เดิม
2. ครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน จากนั้นครูเริ่มอธิบายเนื้อหาเกี่ยวกับความหมายของดีเทอร์มิแนนต์ว่า
ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) หรือตัวกำหนด เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่หาค่าได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีประโยชน์
ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างมาก

ขั้นสอน

3. ครูกล่าวถึงวิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการคูณทแยงพร้อมยกตัวอย่างประกอบ จากเมทริกซ์จัตุรัส A จะได้
ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัส A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ อ่านว่า ดีเทอร์มิแนนต์ A หาค่าได้ ดังนี้
 - ๑) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 1×1 เป็นสมาชิกที่อยู่ในเมทริกซ์จัตุรัส 1×1
ตัวอย่างที่ ๑ ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส $A = [3]$ แล้ว $\det A = |3| = 3$
ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส $B = [-3]$ แล้ว $\det B = |-3| = -3$
 - ๒) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 2 เป็นผลต่างของผลคูณของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยง
มุมหลักกับ
ผลคูณของสมาชิก ที่อยู่บนเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งที่เหลือ

ตัวอย่างที่ ๒

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$① \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \\ &= (3 \times 4) - (1 \times 2) \\ &= 12 - 2 \\ \det A &= 10 \end{aligned}$$

$$② \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \\ &= ((-3) \times 4) - (1 \times 2) \\ &= -12 - 2 \\ \det B &= -14 \end{aligned}$$

$$③ \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \\ &= ((-4) \times 0) - ((-5) \times 2) \\ &= 0 - (-10) \\ \det C &= 10 \end{aligned}$$

- ๓) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 3 เป็นผลของการคูณที่ เกิดจากการนำ หลักที่ 1 และ 2 มาต่อเป็นหลักที่ 4 และ 5 แล้วนำผลบวกของผลคูณสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจาก ด้านบนซ้ายมาด้านล่างขวา ลบด้วยผลบวกของ ผลคูณสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากด้านล่าง ซ้ายไปด้านบนขวา

ตัวอย่างที่ ๓

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จะได้ $\det A$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & \\ 0 & -16 & -9 & & & \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 16 - 9) - (0 - 6 - 2)$$

$$= (-25) - (-8)$$

$$= (-25) + 8$$

$$\det A = -17$$

4. จากนั้นครูให้ผู้เรียนทำแบบฝึกทักษะในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยงในหนังสือเรียน
5. ครูกล่าวถึงการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์อีกหนึ่งวิธีคือการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจาย โคแฟคเตอร์

ซึ่งวิธีการกระจายโคแฟคเตอร์ สามารถใช้ได้กับดีเทอร์มิแนนต์อันดับสองขึ้นไป และจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับไมเนอร์ (Minor) และโคแฟคเตอร์ (Cofactor) ก่อน ดังนี้

- ๑) **ไมเนอร์ (Minor)** ไมเนอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของดีเทอร์มิแนนต์ที่เกิดจากการตัดสมาชิกแถวที่ i และ หลักที่ j ออกจากเมทริกซ์จัตุรัส A เขียนแทนด้วย M_{ij} อ่านว่า ไมเนอร์ของ a_{ij}

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ จงหา M_{11} , M_{21} , และ M_{22}

วิธีทำ

- ๑) M_{11} หาจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของ A

จะได้ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $M_{11} = |-4| = -4$

- ๒) M_{21} หาจากการตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 1 ของ A

จะได้ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $M_{21} = |2| = 2$

- ๓) M_{22} หาจากการตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 2 ของ A

จะได้ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $M_{22} = |-3| = -3$

- ๒) โคแฟกเตอร์ (Cofactor) โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของ M_{ij} ที่มีเครื่องหมายเป็นบวกหรือลบ โดยการ นำ เอา $(-1)^{i+j}$ ยกกำลังแถวที่ i รวมกับหลักที่ j เขียนแทนด้วย c_{ij} อ่านว่า โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} นั่นคือ $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} 2 \quad C_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1) |2| \\ C_{21} &= -2 \\ 3 \quad C_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} \\ &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (1) |-3| \\ C_{22} &= -3 \end{aligned}$$

- ๓) การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ เป็นการลดอันดับของ ดีเทอร์มิแนนต์ โดยการหาผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือในหลักใดหลักหนึ่ง กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิก

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ A เมื่อ

เลือกกระจายตามแถวที่ i จะได้ $\det A = (a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in})$

และถ้าเลือกกระจายตามหลักที่ j จะได้ $\det A = (a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj})$

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ โดยใช้วิธีการกระจายโคแฟกเตอร์

วิธีที่ ๑ เลือกกระจายตามแถวที่ 1 จาก $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

จากสูตร $\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12}$ ①

$$\begin{aligned} \text{หา } C_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} & \text{หา } C_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \\ &= (1) |4| & &= (-1) |1| \\ C_{11} &= 4 & C_{12} &= -1 \end{aligned}$$

แทนค่า a_{11}, a_{12}, c_{11} และ c_{12} ใน ① จะได้ $\det A = 3(4) + 2(-1)$

$\det A = 10$

วิธีที่ ๒ เลือกกระจายตามหลักที่ 1 จาก $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

จากสูตร $\det A = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21}$ ①

$$\begin{aligned} \text{หา } C_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} & \text{หา } C_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} \\ &= (1) |4| & &= (-1) |2| \\ C_{11} &= 4 & C_{21} &= -2 \end{aligned}$$

แทนค่า a_{11}, a_{21}, c_{11} และ c_{21} ใน ① จะได้ $\det A = 3(4) + 1(-2)$

$\det A = 10$

ตัวนั้น ๆ นั่นคือ

ตัวอย่าง

6. จากนั้นครูกล่าวถึงสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งจะช่วยในการหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ทำได้สะดวกมากขึ้น

สมบัติ ของดีเทอร์มิแนนต์มี ดังนี้

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด $n \times n$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $k \neq 0$

- ๑) ถ้าสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของ A มีค่าเป็น 0 ทั้งหมด แล้ว $\det A = 0$
- ๒) ถ้าสมาชิก 2 แถวใด ๆ หรือ 2 หลักใด ๆ ของ A มีค่าเท่ากันทุกคู่ แล้ว $\det A = 0$
- ๓) ถ้าสมาชิกในแถวหนึ่ง หรือหลักหนึ่งมีค่าเป็น k เท่าของอีกแถวหนึ่ง หรือหลักหนึ่ง โดยที่ $k \neq 0$ แล้ว $\det A = 0$
- ๔) ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำเอาเมทริกซ์ A มาสลับแถว หรือหลักใด ๆ แล้ว $\det A = -\det B$
- ๕) ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำจำนวน k คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det B = k \det A$
- ๖) $\det A = \det A^t$ เสมอ
- ๗) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ จัตุรัสที่มีขนาดเท่ากันแล้ว $\det (AB) = (\det A)(\det B)$
- ๘) ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด $n \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ k ใด ๆ คูณกับเมทริกซ์ A โดยที่ $k \neq 0$ แล้ว $\det B = k^n \det A$
- ๙) ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำ k ใดๆ คูณกับแถวใดแถวหนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง หรือการนำ k ใด ๆ คูณกับหลักใดหลักหนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่งแล้ว $\det B = \det A$
- ๑๐) ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ แล้ว $\det A^n = (\det A)^n$
- ๑๑) ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมใด ๆ แล้ว $\det A$ จะมีค่าเท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนว เส้นทแยงมุมหลัก

๗. ผู้เรียนทำแบบฝึกทักษะที่ ๒

ขั้นสรุปและการประยุกต์

๘. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการตอบคำถาม
๙. ครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนท้ายหน่วยที่ ๗

การวัดผลและประเมินผล

ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา

๒) ทดสอบก่อนเรียน

ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ
ต่องานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม

หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Power
๓. กิจกรรมการเรียนการสอน
๔. รูปภาพประกอบ
๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

- ๘.๑ หลักฐานความรู้
 ๑. บันทึกการสอน
 ๒. ใบเช็กรายชื่อ
- ๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน
 ๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

- ๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน
 ๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
 ๒. ตรวจกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้
 ๓. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้
- ๙.๒ วิธีประเมิน
 ๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
 ๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้
- ๙.๓ เครื่องมือประเมิน
 ๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
 ๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

- ๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

- ๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

- ๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา

	ใบความรู้ ที่ ๗	หน่วยที่ ...๗
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๖-๑๗
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ดีเทอร์มิแนนต์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) หรือตัวกำหนด เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่หาค่าได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างมาก

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดไม่เกิน 3×3 และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

๘. บอกความหมายของดีเทอร์มิแนนต์ได้

๙. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยงได้

๑๐. หาไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ได้

๑๑. หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้

๑๒. นำความรู้เรื่องสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์มาใช้ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้

๑๓. นำความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๕. เนื้อหาสาระ๑. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

๑. ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) หรือตัวกำหนด เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่หาค่าได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างมาก จากเมทริกซ์จัตุรัส A จะได้ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัส A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ อ่านว่า ดีเทอร์มิแนนต์ A หาค่าได้ดังนี้

๑.๒ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ ๒

เป็นผลต่างของผลคูณของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักกับผลคูณของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งที่เหลือ

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

นั่นคือ ถ้า กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 แล้ว

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

เรียก $\det A$ ว่า ดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 2

1 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ วิธีทำ จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$$= (3 \times 4) - (1 \times 2)$$

$$= 12 - 2$$

$$\det A = 10$$

2 $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ วิธีทำ จะได้ $\det B = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$$= ((-3) \times 4) - (1 \times 2)$$

$$= -12 - 2$$

$$\det B = -14$$

3 $C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ วิธีทำ จะได้ $\det C = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$$= ((-4) \times 0) - ((-5) \times 2)$$

$$= 0 - (-10)$$

$$\det C = 10$$

นั่นคือ ถ้า กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 แล้ว

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} - & - & - \\ + & + & + \end{matrix}$$

$$= (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32})$$

$$- (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$

$$\det A = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32})$$

$$- (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$

๒. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์อีกวิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยมใช้กันโดยทั่วไป คือ วิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ ซึ่งสามารถใช้ได้กับดีเทอร์มิแนนต์อันดับสองขึ้นไป และจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับไมเนอร์ (Minor) และโคแฟกเตอร์ (Cofactor) ก่อน ดังนี้

๒.๑ ไมเนอร์ (Minor)

ไมเนอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของดีเทอร์มิแนนต์ที่เกิดจากการตัดสมาชิกแถวที่ i และหลักที่ j ออกจากเมทริกซ์จัตุรัส A เขียนแทนด้วย M_{ij} อ่านว่า ไมเนอร์ของ a_{ij}

๒.๒ โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} หมายถึง ค่าของ M_{ij} ที่มีเครื่องหมายเป็นบวก หรือลบ โดยการนำเอา $(-1)^{i+j}$ ยกกำลังแถวที่ i รวมกับหลักที่ j เขียนแทนด้วย C_{ij} อ่านว่า โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} นั่นคือ

$$\begin{aligned} 3 \quad C_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\{0 - (-3)\} \\ C_{12} &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad C_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot M_{23} \\ &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(4 - 12) \\ &= (-1)(-8) \\ C_{23} &= 8 \end{aligned}$$



จากการสังเกต

จาก $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
ถ้า $i+j$ = เป็นเลขคู่
ถ้า $i+j$ = เป็นเลขคี่

จะได้ $C_{ij} = M_{ij}$
จะได้ $C_{ij} = -M_{ij}$

๖. แบบฝึกหัด/แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ขึ้นหน้าใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ฯ)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๗	หน่วยที่ ... ๗
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๖-๑๗
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ ดีเทอร์มิแนนต์	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์		

เฉลย คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๗ ดีเทอร์มิแนนต์

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ ๗

๑. ตอบ ง.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4 \times 2) - (3 \times 1) \\ = (-8) - (3) \\ = -11$$

๒. ตอบ ก.

$$\begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-2 \times 2) - (-5 \times x) \\ = -4 + 5x$$

$$\text{จาก } \begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{จะได้ } -4 + 5x = 1$$

$$5x = 1 + 4$$

$$5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5}$$

$$x = 1$$

๓. ตอบ ก.

$$\begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -4x + 5x$$

$$\text{จาก } \begin{vmatrix} -2 & x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{จะได้ } -4 + 5x = 1$$

$$x = 1$$

๔. ตอบ ค.

$$\begin{vmatrix} 3x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6x - 0 = 6x$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 = 12$$

จาก $\begin{vmatrix} 3x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

จะได้ $6x = 12$

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

๕. ตอบ ง.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 0 + 12$$

$$= (2 + 0 + 12) - (-4 + 0 + (-4))$$

$$= 14 - (-8)$$

$$= 14 + 8$$

$$= 22$$



แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง
 โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำจริงจั่งต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จักฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ ทรัพย์สินสิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชี รายรับ-รายจ่ายของตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อ วิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช้เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและ ปฏิบัติเต็มที่ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและ กาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกัน ยังคงมีความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อม ถูกต้องตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกายใจและ สภาพแวดล้อม มีความผ่องใสเป็นที่เจริญตาแก่ผู้พบเห็น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของ ผู้อื่น รับผิดชอบต่อตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวม พลังช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและจัดความ ขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมทั้งจะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มี ความเดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วม สร้างสรรค์สิ่งดีงามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ

28-30 คะแนน = ดีมาก 15-19 คะแนน = ควรปรับปรุง
 25-27 คะแนน = ดี 0-14 คะแนน = ใช้ไม่ได้
 20-24 คะแนน = พอใช้

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
	๕	๔	๓	๒	๑
๑.ผลการเรียนที่คาดหวังมีความชัดเจน ครอบคลุมพฤติกรรมทุกด้าน (KAP)					
๒.เนื้อหาสาระมีความถูกต้อง ครอบคลุม และชัดเจน					
๓.กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๔.กิจกรรมการเรียนรู้มีความหลากหลาย น่าสนใจและเน้นกระบวนการคิด การฟัง การพูด การอ่าน การดูและการเขียน					
๕.กิจกรรมการเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง					
๖.กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง					
๗.กิจกรรมการเรียนรู้เพียงพอที่จะส่งผลให้บรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๘.กิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดสามารถนำไปปฏิบัติการสอนได้จริง					
๙.มีสื่อที่สอดคล้องกับกิจกรรมและเป็นสื่อที่เน้นกระบวนการคิด					
๑๐.มีการวัดผลประเมินผลที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๑๑.วิธีการวัดผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้					
๑๒.มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินผลไว้อย่างชัดเจนและเหมาะสม					
รวม					

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม

๑.กระบวนการคิดที่ใช้ คือ.....

.....

๒.สิ่งที่ควรปรับปรุง คือ.....

.....

ผู้ประเมิน.....

บันทึกหลังการสอน

ข้อสรุปหลังการสอน

ปัญหาที่พบ

แนวทางแก้ปัญหา

	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ ... ๘
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่ ๑๘
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง/งาน การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

1. ความหมายของระบบสมการเชิงเส้น
2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๒.๑ มาตรฐานอาชีพ.....-.....สมรรถนะย่อย.....-

๑) เกณฑ์การปฏิบัติงาน...-

๒) วิธีประเมิน.....-

๓) หลักฐานการปฏิบัติงาน (Performance Evidence)

๔) หลักฐานความรู้ (Knowledge Evidence)

๒.๒ บุคลากรกลุ่มอาชีพ -

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดไม่เกิน 3×3 และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ได้

๕. สารการเรียนรู้

๑. ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง
๒. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์
๓. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

๖. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนทบทวนว่า จากที่ได้ศึกษาเรื่องดีเทอร์มิแนนต์ สามารถนำไปประยุกต์แก้โจทย์ปัญหาในการหา

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ในที่นี้จะกล่าวถึงการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร โดยใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rules)

2. ครูให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายความหมายของระบบสมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร เป็นสมการที่มีรูปทั่วไป เป็น $ax + by + c = 0$ เมื่อ a และ b ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

สมการเชิงเส้นสามตัวแปร เป็นสมการที่มีรูปทั่วไป เป็น $ax + by + cz + d = 0$ เมื่อ a, b และ c ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ดังนั้น สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร มีสมการรูปทั่วไป เป็น $a_1 x_1 + a_2 x_2 +$

$$a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

เมื่อ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ในการแก้สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร จะต้องมีความจำเป็นที่จำนวนสมการไม่น้อยกว่าจำนวนของตัวแปรทั้งหมด จึงเรียกสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรเหล่านี้ว่าระบบสมการเชิงเส้น (Linear Equation System) และวิธีการแก้ ระบบสมการเชิงเส้นที่นิยมใช้อีกวิธีหนึ่งก็คือการใช้ดีเทอร์มิแนนต์ ตามกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

4. ครูใช้เทคนิคการสอนแบบ Lecture Method การจัดการเรียนรู้แบบบรรยาย คือกระบวนการเรียนรู้ที่ผู้สอน

เป็นผู้ถ่ายทอดความรู้ให้แก่ผู้เรียนโดยพูดบอกเล่า อธิบายและสาธิตเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

เราสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

การหาค่า x และ y โดยใช้กฎของคราเมอร์ ดังนี้

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \text{ และ } x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

5. ครูยกตัวอย่างแสดงวิธีการหาคำตอบของสมการโดยใช้กฎคราเมอร์

จะแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปโดยใช้กฎของครามเมอร์

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 7 \\ 5x + 4y & = & 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \end{array}$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 15 \\ 8 \end{matrix} \\ &= (2)(4) - (5)(3) \\ &= 8 - 15 \\ \det A &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \det A_1 &= \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} \\ \det A_1 &= \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 42 \\ 28 \end{matrix} \\ &= (7)(4) - (14)(3) \\ &= 28 - 42 \\ \det A_1 &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \det A_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} \\ \det A_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} \begin{matrix} 35 \\ 28 \end{matrix} \\ &= (2)(14) - (5)(7) \\ &= 28 - 35 \\ \det A_2 &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้คำตอบของระบบสมการคือ } x &= \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-14}{-7} = 2 \\ y &= \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-7}{-7} = 1 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ แทนค่า $x = 2$ และ $y = 1$

$$\begin{aligned} \text{จาก ①; } 2x + 3y &= 7 \\ 2(2) + 3(1) &= 7 \\ 7 &= 7 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก ② } 5x + 4y &= 14 \\ 5(2) + 4(1) &= 14 \\ 14 &= 14 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $x = 2$ และ $y = 1$

6. ครูให้ผู้เรียนแสดงการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในแบบฝึกทักษะ โดยใช้กฎของครามเมอร์
7. ครูเน้นให้ผู้เรียนให้ปฏิบัติงานด้วยความความระมัดระวัง เพื่อเป็นการสร้างภูมิคุ้มกันที่ดีในตัวเอง
ขั้นสรุปและการประยุกต์
8. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์

โดยการตอบคำถาม

การวัดผลและประเมินผล

- ก่อนเรียน ๑) ใช้สมุดบันทึกเวลาเรียน ขานชื่อผู้เรียนและตรวจการตรงต่อเวลา
 ๒) ทดสอบก่อนเรียน

ขณะเรียน ๑) ใช้แบบสังเกตพฤติกรรม สังเกตการตอบคำถาม ความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ ต่อ
งานที่มอบหมาย การร่วมกิจกรรม

- หลังเรียน ๑) ทดสอบหลังเรียน ใช้เกณฑ์ผ่าน ๕๐ %

๗. สื่อและแหล่งการเรียนรู้

๑. หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม
๒. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ และ Power Point
๓. กิจกรรมการเรียนการสอน
๔. รูปภาพประกอบ
๕. ตัวอย่างการคำนวณ

๘. หลักฐานการเรียนรู้

๘.๑ หลักฐานความรู้

๑. บันทึกการสอน
๒. ใบเช็กรายชื่อ

๘.๒ หลักฐานการปฏิบัติงาน

๑. แผนจัดการเรียนรู้

๙. การวัดและประเมินผล

๙.๑ เกณฑ์การปฏิบัติงาน

๑. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. ตรวจกิจกรรมส่งเสริมคุณธรรมนำความรู้
๓. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๒ วิธีการประเมิน

๑. แบบสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้

๙.๓ เครื่องมือประเมิน

๑. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
๒. แบบประเมินผลการเรียนรู้มีเกณฑ์ผ่าน ๕๐%

๑๐. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๑ ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

๑๐.๒ ปัญหาที่พบ

๑๐.๓ แนวทางแก้ปัญหา

	ใบความรู้ ที่ ๘	หน่วยที่ ...๘
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๘
	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ	ทฤษฎี ๐ ชม. ปฏิบัติ ๒ ชม.
ชื่อเรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ		

๑. ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับหน่วยการเรียนรู้

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) หรือตัวกำหนด เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่หาค่าได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างมาก

๒. อ้างอิงมาตรฐาน/เชื่อมโยงกลุ่มอาชีพ

๓. สมรรถนะประจำหน่วย

คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดไม่เกิน 3×3 และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพและชีวิตประจำวันได้

๔. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ได้

๕. เนื้อหาสาระ๑. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

๑. ความหมายของระบบสมการเชิงเส้น

๑. ความหมายของระบบสมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร เป็นสมการที่มีรูปทั่วไป เป็น $ax + by + c = 0$ เมื่อ a และ b ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

สมการเชิงเส้นสามตัวแปร เป็นสมการที่มีรูปทั่วไป เป็น $ax + by + cz + d = 0$ เมื่อ a , b และ c ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ดังนั้น สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร จึงมีสมการรูปทั่วไป เป็น $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ เมื่อ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ในการแก้สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร จะต้องมีความรู้จำนวนสมการไม่น้อยกว่าจำนวนของตัวแปรทั้งหมด จึงเรียกสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรเหล่านี้ว่าระบบสมการเชิงเส้น (Linear Equation System) และวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่นิยมใช้อีกวิธีหนึ่งก็คือการใช้ดีเทอร์มิแนนต์ ตามกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

๒. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้ ดีเทอร์มิแนนต์และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรมีรูปแบบดังนี้

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

เราสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

จากความรู้เรื่องการคูณเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ถ้ากำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการเชิงเส้น

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์ของตัวแปรของสมการเชิงเส้น}$$

และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของค่าคงตัวทางขวามือ

แล้วจะได้ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ เมื่อ $\det A \neq 0$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ และ } \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

จะได้คำตอบของระบบสมการคือ $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$ และ $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$

๓. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร โดยใช้ ดีเทอร์มิแนนต์และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ
ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรมีรูปแบบดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \textcircled{1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \textcircled{2}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \textcircled{3}$$

เราสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรนี้ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ ในทำนองเดียวกันกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ เมื่อ $\det A \neq 0$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

และ $\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

จะได้คำตอบของระบบสมการคือ $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$ และ $x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$

๖. แบบฝึกหัด/แบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

๗. เอกสารอ้างอิง (ชั้นนำใหม่)

หนังสือรายวิชาการฟังและการพูดภาษาอังกฤษ Listening and Speaking English

๘. ภาคผนวก (เฉลยแบบฝึกหัด เฉลยแบบทดสอบ ฯ)

เฉลยแบบฝึกหัด

	ใบงาน ที่ ๘	หน่วยที่ ... ๘
	รหัสวิชา ๒๐๐๐๐-๑๔๐๒ ชื่อวิชา คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม	สอนครั้งที่๑๘

	ชื่อหน่วยการเรียนรู้ การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ	ทฤษฎีปฏิบัติ ๐ ชม. ๒ ชม.
ชื่อเรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ		

เฉลย คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๘ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

เฉลย แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ ๘

1. ตอบ ก.

$$3x + 2y = 13$$

$$2x - y = 4$$

เขียนระบบเชิงเส้นสองตัวแปรให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

จากความรู้เรื่องการคูณเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. ตอบ ก.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-1) - (2)(2)$$

$$= -3 - 4$$

$$\det A = -7$$

3. ตอบ ข.

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(4) - (2)(13)$$

$$= 12 - 26$$

$$\det A_2 = -14$$

4. ตอบ ข.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (13)(-1) - (4)(2)$$

$$= -13 - 8$$

$$\det A_1 = -21$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-21}{-7} = 3$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-14}{-7} = 2$$

ตรวจคำตอบ แทนค่า $x = 3$ และ $y = 2$

จาก ① ; $3x + 2y = 13$

$$3(3) + 2(2) = 13$$

$$9 + 4 = 13$$

$$13 = 13 \text{ เป็นจริง}$$

จาก ② ; $2x - y = 4$

$$2(3) - 2 = 4$$

$$6 - 2 = 4$$

$$4 = 4 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น $x = 3$ และ $y = 2$

5. ตอบ ก.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

เขียนในระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ได้ดังนี้

$$-3x + 4y = -7$$

$$x - 2y = 3$$

แบบประเมินผลการส่งเสริมคุณธรรมพื้นฐาน

คำชี้แจง เพื่อให้การขับเคลื่อนคุณธรรมพื้นฐานมีความชัดเจน เกิดประสิทธิภาพสูงสุด และนำไปสู่การปฏิบัติได้
 อย่างเป็นรูปธรรม จึงมีการประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง
 โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้ ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการ	พฤติกรรมบ่งชี้	ระดับคุณภาพ				
		๕	๔	๓	๒	๑
๑.ความขยัน	☐ ผู้ที่มีความขยัน คือ ผู้ที่ตั้งใจทำจริงจั่งต่อเนื่องในเรื่องที่ถูกที่ควร สู้งาน มีความพยายาม ไม่ท้อถอย อดทน กล้าเผชิญอุปสรรค					
๒.ประหยัด	☐ ผู้ที่มีความประหยัด คือ ผู้ที่ดำเนินชีวิตความเป็นอยู่เรียบง่าย รู้จักฐานะการเงินของตน คิดก่อนใช้คิดก่อนซื้อ เก็บออม ถนอมใช้ ทรัพย์สินสิ่งของอย่างคุ้มค่า ไม่ฟุ่มเฟือย ฟุ้งเฟ้อ รู้จักทำบัญชี รายรับ-รายจ่ายของตนเองเสมอ					
๓.ความซื่อสัตย์	☐ ผู้ที่มีความซื่อสัตย์ คือ ผู้ที่มีความประพฤติตรงทั้งต่อหน้าที่ ต่อ วิชาชีพ ตรงต่อเวลา ไม่ใช้เล่ห์กล คดโกง รับรู้หน้าที่ของตนเองและ ปฏิบัติเต็มที่ถูกต้อง					
๔.ความมีวินัย	☐ ผู้ที่มีวินัย คือ ผู้ที่ปฏิบัติตนในขอบเขต กฎ ระเบียบสถานศึกษา สถาบัน/องค์กร/สังคมและประเทศ โดยที่ยินดีปฏิบัติตามอย่างเต็มใจ					
๕.ความสุภาพ	☐ ผู้ที่มีความสุภาพ คือ ผู้ที่อ่อนน้อมถ่อมตนตามสถานภาพและ กาลเทศะ ไม่ก้าวร้าว วางอำนาจข่มผู้อื่น เรียบร้อย อ่อนโยน ละมุน ละม่อม มีกิริยามารยาทดีงาม มีสัมมาคารวะ แต่ในเวลาเดียวกัน ยังคงมีความมั่นใจในตนเอง วางตนเหมาะสมตามวัฒนธรรมไทย					
๖.ความสะอาด	☐ ผู้ที่ความสะอาด คือ ผู้รักษาร่างกาย ที่อยู่อาศัย สิ่งแวดล้อม ถูกต้องตามสุขลักษณะ ปราศจากความมัวหมองทั้งกาย ใจและ สภาพแวดล้อม มีความผ่องใสเป็นที่เจริญตาแก่ผู้พบเห็น					
๗.ความสามัคคี	☐ ผู้ที่มีความสามัคคี คือ ผู้ที่เปิดใจกว้างรับฟังความคิดเห็นของ ผู้อื่น รับผิดชอบต่อตนในฐานะผู้นำและผู้ตามที่ดี มุ่งมั่นต่อการรวม พลังช่วยเหลือเกื้อกูลกันเพื่อให้งานสำเร็จ แก้ปัญหาและจัดการความ ขัดแย้งได้ มีเหตุผล ยอมรับความแตกต่างหลากหลายทางวัฒนธรรม ความคิด ความเชื่อ พร้อมทั้งจะปรับตัวเพื่ออยู่ร่วมกันอย่างสันติ					
๘.ความมีน้ำใจ	☐ ผู้ที่มีน้ำใจ คือ ผู้ให้และผู้อาสาช่วยเหลือสังคม รู้จักแบ่งปัน เสียสละความสุขส่วนตน เพื่อประโยชน์แก่ผู้อื่น เข้าใจ เห็นใจผู้ที่มี ความเดือดร้อน ลงมือปฏิบัติการเพื่อบรรเทาปัญหา หรือร่วม สร้างสรรค์สิ่งดีงามให้เกิดขึ้นในชุมชน					
รวมคะแนนที่ได้.....คะแนน						

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม.....

เกณฑ์การประเมินระดับคุณภาพ			
28-30 คะแนน =	ดีมาก	15-19 คะแนน =	ควรปรับปรุง
25-27 คะแนน =	ดี	0-14 คะแนน =	ใช้ไม่ได้
20-24 คะแนน =	พอใช้		

ผู้ประเมิน.....

แบบประเมินผลการเรียนรู้

คำชี้แจง ให้ประเมินรายการแต่ละข้อแล้วเขียน เครื่องหมาย / ลงในช่องระดับคุณภาพตามความเป็นจริง โดยกำหนดน้ำหนักคะแนน ดังนี้- ๕ = ดีมาก, ๔ = ดี, ๓ = พอใช้, ๒ = ควรปรับปรุง, ๑ = ใช้ไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับคุณภาพ				
	๕	๔	๓	๒	๑
๑.ผลการเรียนที่คาดหวังมีความชัดเจน ครอบคลุมพฤติกรรมทุกด้าน (KAP)					
๒.เนื้อหาสาระมีความถูกต้อง ครอบคลุม และชัดเจน					
๓.กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๔.กิจกรรมการเรียนรู้มีความหลากหลาย น่าสนใจและเน้นกระบวนการคิด การฟัง การพูด การอ่าน การดูและการเขียน					
๕.กิจกรรมการเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติจริง					
๖.กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง					
๗.กิจกรรมการเรียนรู้เพียงพอที่จะส่งผลให้บรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๘.กิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดสามารถนำไปสู่ปฏิบัติการสอนได้จริง					
๙.มีสื่อที่สอดคล้องกับกิจกรรมและเป็นสื่อที่เน้นกระบวนการคิด					
๑๐.มีการวัดผลประเมินผลที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง					
๑๑.วิธีการวัดผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้					
๑๒.มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินผลไว้อย่างชัดเจนและเหมาะสม					
รวม					

ข้อคิดเห็นเพิ่มเติม

๑.กระบวนการคิดที่ใช้ คือ.....

.....

๒.สิ่งที่ควรปรับปรุง คือ.....

.....

ผู้ประเมิน.....

บันทึกหลังการสอน

ข้อสรุปหลังการสอน

ปัญหาที่พบ

แนวทางแก้ปัญหา