

บทเรียนที่

5

อสมการ



สาระสำคัญ

- 1 อสมการ เป็นประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยใช้เครื่องหมาย $>$ (มากกว่า), $<$ (น้อยกว่า), $\geq$ (มากกว่าหรือเท่ากับ), $\leq$ (น้อยกว่าหรือเท่ากับ) และ $\neq$ (ไม่เท่ากับ)
- 2 อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เป็นอสมการที่มีตัวแปรเดียวและเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นหนึ่ง
- 3 อสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เป็นอสมการที่มีตัวแปรสองตัวโดยที่เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นหนึ่งและไม่มีการคูณระหว่างตัวแปร





สาระการเรียนรู้

- 1 ความหมายของอสมการ
- 2 เส้นจำนวนและช่วง
- 3 อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
- 4 การแก้อสมการ
- 5 การนำสมบัติการไม่เท่ากันไปใช้ในการแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
- 6 อสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
- 7 กราฟของระบบอสมการเชิงเส้น



สมรรถนะประจำบทเรียน

- 1 แสดงความรู้เกี่ยวกับอสมการ
- 2 ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับอสมการไปใช้ในชีวิตประจำวันและงานอาชีพ



จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

- 1 อธิบายความหมายของอสมการได้ถูกต้อง
- 2 เขียนช่วงต่าง ๆ ที่กำหนดให้ในรูปของเซตและกราฟได้ถูกต้อง
- 3 หาเซตคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ถูกต้อง
- 4 หาเซตคำตอบของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้ถูกต้อง
- 5 เขียนกราฟของระบบอสมการเชิงเส้นได้ถูกต้อง
- 6 มีเจตคติและกิจนิสัยที่ดีในการคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาในเรื่องอสมการในงานอาชีพอย่างเป็นระบบ
- 7 ประยุกต์ใช้ความรู้และทักษะเรื่องอสมการไปเชื่อมโยงในงานอาชีพได้ถูกต้อง



ผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับบทเรียน

ประยุกต์ใช้อสมการในงานอาชีพธุรกิจและบริการ





อสมการ

ความหมายของอสมการ

อสมการ (Inequality) เป็นประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนที่ใช้เครื่องหมาย $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ และ $\neq$



เครื่องหมาย

$>$

อ่านว่า มากกว่า

$<$

อ่านว่า น้อยกว่า

$\geq$

อ่านว่า มากกว่าหรือเท่ากับ

$\leq$

อ่านว่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ

$\neq$

อ่านว่า ไม่เท่ากับ

เช่น สามมากกว่าหนึ่ง

เขียนเป็น $3 > 1$

ห้าน้อยกว่าแปด

เขียนเป็น $5 < 8$

เจ็ดไม่เท่ากับเก้า

เขียนเป็น $7 \neq 9$

สาม a น้อยกว่าหรือเท่ากับเจ็ด

เขียนเป็น $3a \leq 7$

สอง x มากกว่าหรือเท่ากับสี่

เขียนเป็น $2x \geq 4$

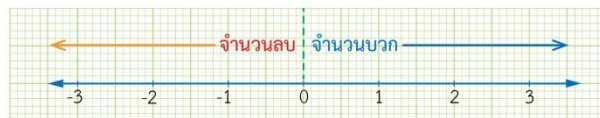
ตัวแปร (Variable) เป็นตัวอักษรหรือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนที่ไม่ทราบค่าหรือต้องการหา
นิยมแทนตัวแปรด้วยสัญลักษณ์ $a, b, c, \dots, x, y, z$





เส้นจำนวนและช่วง

เส้นจำนวน เป็นแผนภาพในหนึ่งมิติที่มีจำนวนเต็มปรากฏอยู่บนขีดเป็นช่วงๆ บนเส้นตรง โดยแบ่งออกเป็นสองข้าง คือจำนวนบวก จำนวนลบ และมีศูนย์เป็นจุดกำเนิด แต่ในความจริงนั้นเส้นจำนวนจะครอบคลุมถึงจำนวนจริง โดยสามารถต่อความยาวทั้งสองข้างออกไปไม่สิ้นสุด ดังรูป



ช่วง (Interval) ช่วงของจำนวนจริงจะมีลักษณะและใช้สัญลักษณ์แทนช่วงต่างๆ กันดังต่อไปนี้ กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$ ช่วงจำกัดจะมีดังนี้

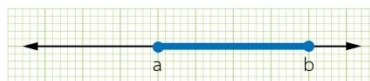
- ① ช่วงเปิด (a, b) เขียนในรูปเซต $\{x \mid a < x < b\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุด ระหว่าง a และ b แต่ไม่รวมจุด a และ b



- ② ช่วงปิด $[a, b]$ เขียนในรูปเซต $\{x \mid a \leq x \leq b\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุดระหว่าง a และ b รวมทั้งจุด a และจุด b



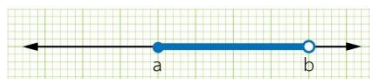
- ③ ช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด $(a, b]$ เขียนในรูปเซต $\{x \mid a < x \leq b\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุดระหว่าง a และ b ไม่รวมจุด a แต่รวมจุด b



- ④ ช่วงครึ่งปิดครึ่งเปิด $[a, b)$ เขียนในรูปเซต $\{x \mid a \leq x < b\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุดระหว่าง a และ b รวมจุด a แต่ไม่รวมจุด b

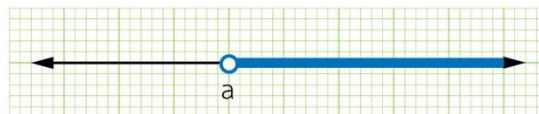




กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ช่วงอนันต์จะมีดังนี้

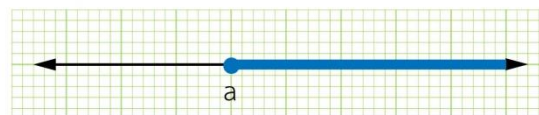
① ช่วง (a, ∞) เขียนในรูปเซต $\{x \mid x > a\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุดที่มีค่ามากกว่า a ไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด



② ช่วง $[a, \infty)$ เขียนในรูปเซต $\{x \mid x \geq a\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุดที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ a ไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด



③ ช่วง $(-\infty, a)$ เขียนในรูปเซต $\{x \mid x < a\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุดที่มีค่าน้อยกว่า a ไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด



④ ช่วง $(-\infty, a]$ เขียนในรูปเซต $\{x \mid x \leq a\}$

หมายถึง จุดทุกๆ จุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a ไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด





ตัวอย่างที่ 1

จงเขียนช่วงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเซต พร้อมทั้งเขียนกราฟของช่วง

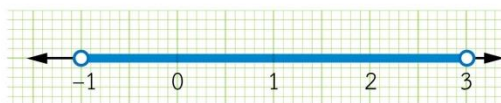
- 1) $(-1, 3)$
- 2) $[1, 5)$
- 3) $[2, \infty)$
- 4) $(-\infty, 1)$

วิธีทำ

- 1) $(-1, 3)$

เขียนในรูปเซต $\{x \mid -1 < x < 3\}$

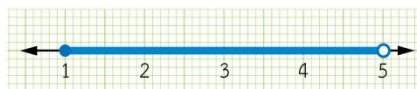
เขียนในรูปกราฟ



- 2) $[1, 5)$

เขียนในรูปเซต $\{x \mid 1 \leq x < 5\}$

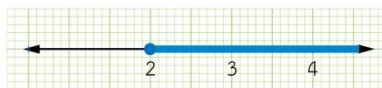
เขียนในรูปกราฟ



- 3) $[2, \infty)$

เขียนในรูปเซต $\{x \mid x \geq 2\}$

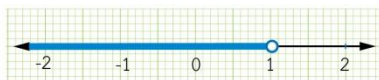
เขียนในรูปกราฟ



- 4) $(-\infty, 1)$

เขียนในรูปเซต $\{x \mid x < 1\}$

เขียนในรูปกราฟ





ในการเขียนช่วงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเซตได้ ทั้งนี้ในการดำเนินการของเซตทำได้หลายวิธี คือ ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ และผลต่าง ดังนี้

- 1 ยูเนียน (Union) ใช้เครื่องหมาย “ $\cup$ ” หมายถึง ส่วนประกอบที่รวมกันทั้งหมด
- 2 อินเตอร์เซกชัน (Intersection) ใช้เครื่องหมาย “ $\cap$ ” หมายถึง ส่วนที่ซ้ำหรือเหมือนกันเท่านั้น
- 3 คอมพลีเมนต์ (Complement) ใช้เครื่องหมาย “ $'$ ” ได้แก่ A' หมายถึง ส่วนที่ไม่ใช่สมาชิกของ A
- 4 ผลต่าง (Difference) ใช้เครื่องหมาย “ $-$ ” ได้แก่ $A - B$ หมายถึง เป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B



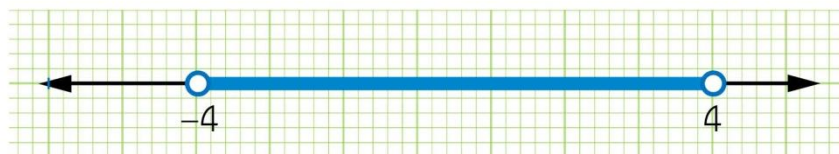


ตัวอย่างที่ 2

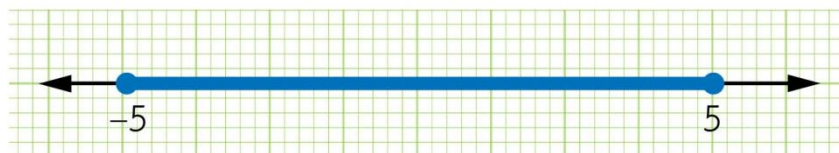
กำหนด $A = (-4, 4)$ และ $B = [-5, 5]$ จงหา $A \cup B$ และ $A \cap B$

วิธีทำ

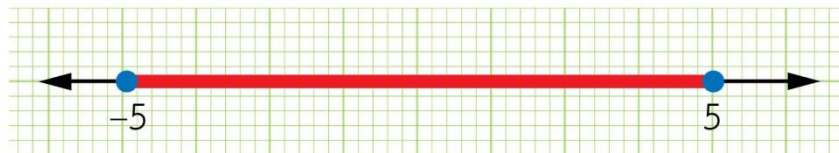
$$A = (-4, 4)$$



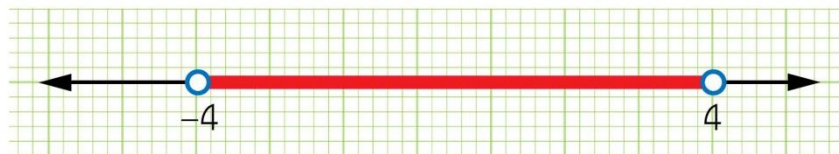
$$B = [-5, 5]$$



$$A \cup B = [-5, 5]$$



$$A \cap B = (-4, 4)$$





การแก้อสมการ

การแก้อสมการ คือ การหาค่าของตัวแปรในอสมการ ซึ่งจะทำให้ได้เซตคำตอบของอสมการที่จะทำให้อสมการเป็นจริง

ในการแก้อสมการจำเป็นต้องใช้สมบัติการไม่เท่ากันของจำนวนจริง ดังต่อไปนี้

สมบัติการไม่เท่ากัน

ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1 สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

เช่น $10 > 8$ และ $8 > 5$ แล้ว $10 > 5$

$(-3) > (-4)$ และ $(-4) > (-5)$ แล้ว $(-3) > (-5)$

2 สมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน

ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

ถ้า $a > b$ แล้ว $a + (-c) > b + (-c)$ หรือ $a - c > b - c$

เช่น $5 > 3$ ให้ $c = 2$ จะได้ $5 + 2 > 3 + 2$ หรือ $7 > 5$

$5 > 3$ ให้ $c = -2$ จะได้ $5 + (-2) > 3 + (-2)$ หรือ $3 > 1$





3 สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน

ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

เช่น $5 > 3$ ให้ $c = 2$ จะได้ $5 \times 2 > 3 \times 2$ หรือ $10 > 6$

$-2 > -3$ ให้ $c = 4$ จะได้ $(-2) \times 4 > (-3) \times 4$ หรือ $-8 > -12$

ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

เช่น $5 > 3$ ให้ $c = -2$ จะได้ $5 \times (-2) < 3 \times (-2)$ หรือ $-10 < -6$

$5 > 3$ ให้ $c = -4$ จะได้ $5 \times (-4) < 3 \times (-4)$ หรือ $(-20) < (-12)$



การนำสมบัติการไม่เท่ากันไปใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

หลักการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว อาศัยสมบัติการไม่เท่ากันและความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับช่วง

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการต่อไปนี้

1) $x + 7 < 3$

2) $4 - 3x > 10$

วิธีทำ

1) $x + 7 < 3$

$$x + 7 < 3$$

$$x + 7 + (-7) < 3 + (-7) \text{ (นำ } -7 \text{ บวกทั้งสองข้าง)}$$

$$x < -4$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x < -4\}$ หรือ $(-\infty, -4)$

2) $4 - 3x > 10$

$$4 - 3x > 10$$

$$4 - 3x + (-4) > 10 + (-4)$$

$$-3x > 6$$

$$\left(\frac{1}{-3}\right) - 3x < \left(\frac{1}{-3}\right) 6 \text{ (นำ } \frac{1}{-3} \text{ คูณทั้งสองข้าง)}$$

$$x < -2$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x < -2\}$ หรือ $(-\infty, -2)$





ตัวอย่างที่ 2

จงแก้สมการ $3 \leq 5x - 7 \leq 2x + 8$

วิธีทำ

พิจารณา $3 \leq 5x - 7$ และ $5x - 7 \leq 2x + 8$

$5x - 7 \geq 3$ และ $5x - 7 \leq 2x + 8$

$5x \geq 10$ และ $3x \leq 15$

$x \geq 2$ และ $x \leq 5$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$ หรือ $[2, 5]$





อสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



ความหมายของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

อสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ อสมการที่มีตัวแปรสองตัว เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นหนึ่ง และไม่มีการคูณระหว่างตัวแปร

$$\text{เช่น } 2x + y \geq 7$$

$$y \leq x + 1$$

$$x - 2y > 4$$



กราฟของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

กราฟของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ กราฟของคู่อันดับหรือกราฟของความสัมพันธ์ที่เขียนในระบบแกนมุมฉาก

หลักการเขียนกราฟของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ใช้หลักการเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร วิธีที่สะดวกและรวดเร็วคือการหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน x และจุดที่เส้นตรงตัดแกน y

- หาจุดตัดบนแกน x นั่นคือ $y = 0$
- หาจุดตัดบนแกน y นั่นคือ $x = 0$





ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของอสมการ $y \leq x + 1$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของสมการ $y = x + 1$

พิจารณาหาจุดตัดบนแกน x , ให้ $y = 0$ จะได้ $0 = x + 1$
 $x = -1$

จุดตัดบนแกน x คือ $(-1, 0)$

พิจารณาหาจุดตัดบนแกน y , ให้ $x = 0$ จะได้ $y = 0 + 1$
 $y = 1$

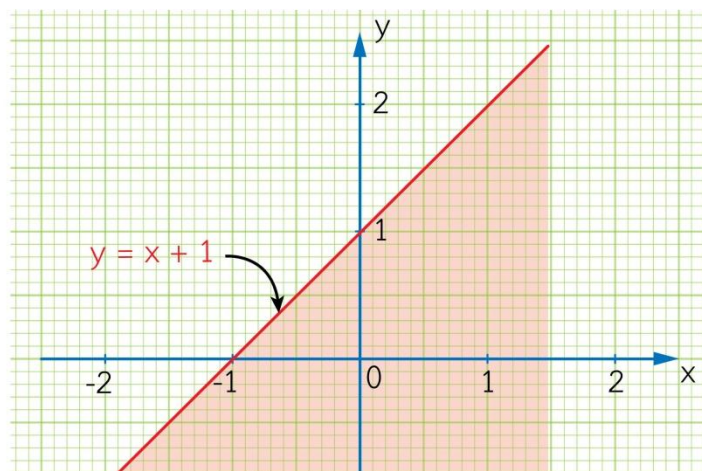
จุดตัดบนแกน y คือ $(0, 1)$

ขั้นที่ 2 หาส่วนที่ทำให้อสมการ $y \leq x + 1$ เป็นจริง

เลือกพิจารณาจุดพิกัด $(0, 0)$; $0 \leq 0 + 1$
 $0 < 1$

พบว่าจุดดังกล่าวทำให้อสมการดังกล่าวเป็นจริง

นั่นคือส่วนที่ทำให้อสมการ $y \leq x + 1$ เป็นจริงคือส่วนที่จุด $(0, 0)$ รวมอยู่ด้วย
ดังนั้น กราฟของอสมการของ $y \leq x + 1$ จึงเป็นบริเวณแรเงาดังรูป





ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของอสมการ $x + 2y \geq 6$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของสมการ $x + 2y = 6$

x	6	0
y	0	3

ให้ $y = 0$; $x + 0 = 6$

$x = 6$

ให้ $x = 0$; $0 + 2y = 6$

$y = 3$

ขั้นที่ 2 หาส่วนที่ทำให้สมการ $x + 2y \geq 6$ เป็นจริง

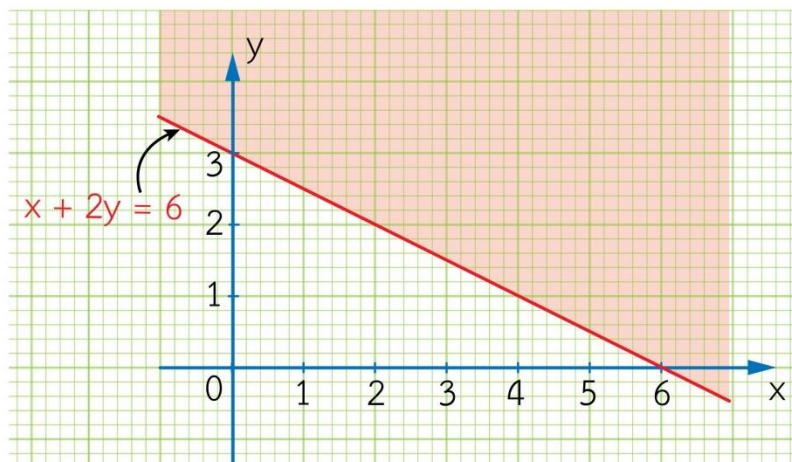
เลือกพิจารณาจุดพิกัด $(0, 0)$; $0 + 0 \geq 6$

พบว่าจุดดังกล่าวทำให้สมการไม่เป็นจริง

นั่นคือ ส่วนที่ทำให้สมการ $x + 2y \geq 6$ เป็นจริง ต้องเป็นส่วนที่ไม่มีจุด $(0, 0)$

รวมอยู่ด้วย

ดังนั้น กราฟของอสมการของ $x + 2y \geq 6$ จึงเป็นบริเวณที่แรเงาดังรูป





ข้อสังเกต การเขียนกราฟของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ทำได้โดย

1 เขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

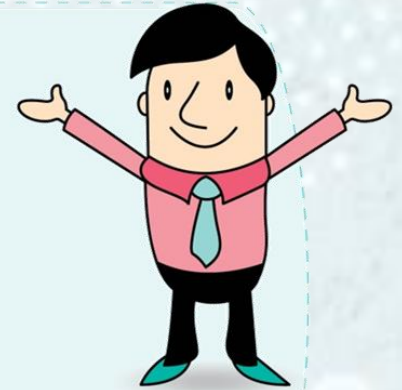
โดยหาจุดตัดบนแกน x คือ $(x, 0)$

และหาจุดตัดบนแกน y คือ $(0, y)$

ถ้าเป็นเครื่องหมาย $< , >$ ให้วาดกราฟเส้นประ

ถ้าเป็นเครื่องหมาย $\leq , \geq$ ให้วาดกราฟเส้นทึบ

2 กราฟแบ่งระนาบออกเป็น 2 ส่วน คือส่วนที่เมื่อแทนค่าพิกัดจุดในอสมการแล้ว
อสมการเป็นจริงให้แรเงาส่วนนั้น และหากอสมการไม่เป็นจริงให้แรเงาอีกส่วนหนึ่ง





กราฟของระบบอสมการเชิงเส้น

พิจารณาอสมการเชิงเส้นมากกว่าหนึ่งอสมการพร้อมๆ กัน จะเรียกว่า ระบบอสมการเชิงเส้น คำตอบของระบบอสมการเชิงเส้น คือ คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับอสมการทั้งหมดของระบบอสมการ หรือคู่อันดับ (x, y) ที่ค่า x และค่า y ทำให้อสมการทั้งหมดเป็นจริง เมื่อพิจารณาคำตอบของระบบอสมการเชิงเส้นจะแทนได้ด้วยบริเวณที่ซ้อนทับกันของกราฟอสมการทั้งหมดนั่นเอง

กราฟของระบบอสมการเชิงเส้น

- 1 ให้เขียนกราฟย่อยของระบบอสมการในระนาบเดียวกัน
- 2 กราฟของระบบอสมการเกิดจากกราฟของอสมการย่อยของระบบอสมการมาซ้อนทับกัน





ตัวอย่างที่ 1

จงเขียนกราฟของระบบอสมการ $x + y \leq 5$ และ $2x + y \geq 2$

วิธีทำ

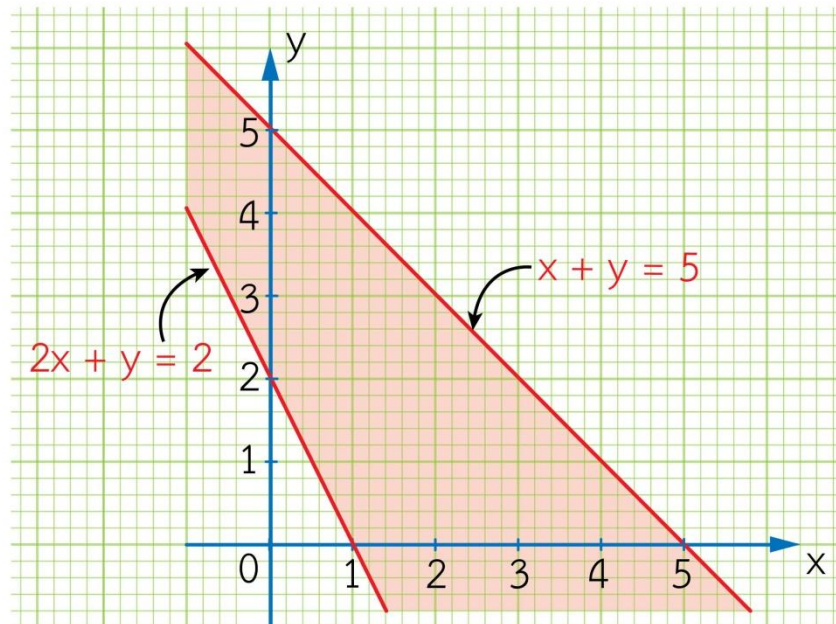
- 1 เขียนกราฟสมการเชิงเส้น $x + y = 5$

x	0	5
y	5	0

- 2 เขียนกราฟสมการเชิงเส้น $2x + y = 2$

x	0	1
y	2	0

ดังนั้น กราฟของระบบอสมการคือบริเวณที่แรเงาดังรูป





ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนกราฟของระบบอสมการ

$$2x + 3y \leq 12$$

$$6x + 5y \leq 30$$

$$x \geq 0, y \geq 1$$

วิธีทำ

1 เขียนกราฟสมการเชิงเส้น $2x + 3y = 12$

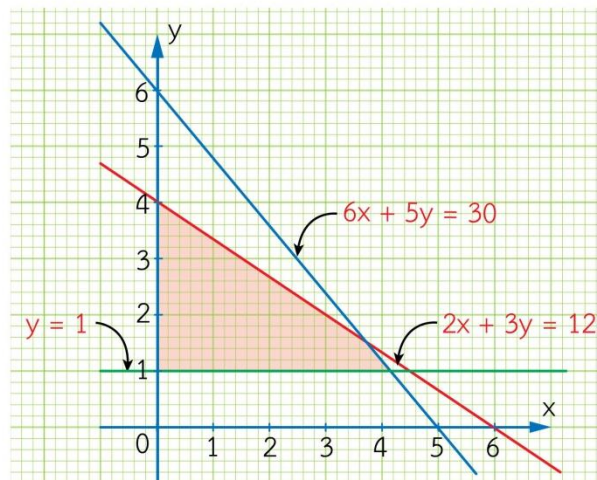
x	0	6
y	4	0

2 เขียนกราฟสมการเชิงเส้น $6x + 5y = 30$

x	0	5
y	6	0

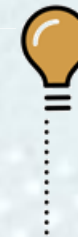
3 เขียนกราฟ $y = 1$ และ $x \geq 0$

ดังนั้น กราฟของระบบอสมการคือบริเวณที่แรเงาดังรูป





สรุป



อสมการ เป็นประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยใช้เครื่องหมาย $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ และ

$\neq$

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เป็นอสมการที่มีตัวแปรเดียวและเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นหนึ่ง
การแก้อสมการ เป็นการหาค่าของตัวแปรในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริง ซึ่งใช้สมบัติ
การไม่เท่ากัน

ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1 สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

2 สมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน

ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

หรือ $a - c > b - c$

3 สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน

ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

อสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเป็นอสมการที่มีตัวแปรสองตัว เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นหนึ่ง
และไม่มีการคูณระหว่างตัวแปร

การเขียนกราฟของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1 เขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

2 กราฟแบ่งระนาบออกเป็น 2 ส่วน โดยเลือกจุดส่วนหนึ่งมาแทนในอสมการหากแทนค่าแล้ว
อสมการเป็นจริงให้แรเงาส่วนนั้น และหากอสมการไม่เป็นจริงให้แรเงาอีกส่วนหนึ่ง



สิ้นสุดการนำเสนอประจำหน่วย

