



หน่วยที่

10

การหาคำตอบของ ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์

ระบบสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

รูปทั่วไปของระบบสมการ คือ

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

นำมาเขียนในรูปสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ให้ A เป็นเมทริกซ์ มิติ 2×2 ที่มีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์
ของ x และ y ในระบบสมการ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

ให้ X เป็นเมทริกซ์ มิติ 2×2 ที่มีสมาชิกเกิดจากการนำ c_1 และ c_2
มาแทนที่ในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A

$$X = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

ให้ Y เป็นเมทริกซ์ มิติ 2×2 ที่มีสมาชิกเกิดจากการนำ c_1 และ c_2
มาแทนที่ในหลักที่ 2 ของเมทริกซ์ A

$$Y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

การหาค่า x และ y โดยใช้กฎของคราเมอร์ ดังนี้

$$x = \frac{\det X}{\det A} \quad \text{เมื่อ } \det A \neq 0$$

$$y = \frac{\det Y}{\det A}$$



ตัวอย่างที่ 1

จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้
โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$3x + 2y = -3$$

$$4x - 3y = 13$$

วิธีทำ

ให้ A , X และ Y เป็นเมทริกซ์ มิติ 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-3) - (4)(2)$$

$$\det A = -17$$

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 13 & -3 \end{bmatrix} \\
 \det X &= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} \\
 &= (-3)(-3) - (13)(2) \\
 \det X &= -17 \\
 Y &= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \\
 \det Y &= \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} \\
 &= (3)(13) - (4)(-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det Y &= 51 \\
 x &= \frac{\det X}{\det A} \\
 &= \frac{-17}{-17} \\
 x &= 1 \\
 y &= \frac{\det Y}{\det A} \\
 &= \frac{51}{-17} \\
 y &= -3
 \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $x = 1, y = -3$

ระบบสมการ เชิงเส้นสามตัวแปร

ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

รูปทั่วไปของระบบสมการ คือ

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad \dots \textcircled{3}$$

นำมาเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ให้ A เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของ x , y และ z ในระบบสมการ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ให้ X เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเกิดจากการนำ d_1 , d_2 และ d_3 มาแทนที่ในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A

$$X = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ให้ Y เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเกิดจากการนำ d_1 , d_2 และ d_3 มาแทนที่ในหลักที่ 2 ของเมทริกซ์ A



$$Y = \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ให้ Z เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเกิดจากการนำ d_1 , d_2 และ d_3 มาแทนที่ในหลักที่ 3 ของเมทริกซ์ A

$$Z = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$



ตัวอย่างที่ 2

จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้
โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$2x + y - z = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$3x - 2y + 2z = -3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$x - 3y - 3z = -2 \quad \dots \textcircled{3}$$

วิธีทำ

ให้ A เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของ
 x , y และ z ในระบบสมการ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$



ให้ X เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเกิดจากการแทน 5 , -3 และ -2 ในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

ให้ Y เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเกิดจากการแทน 5 , -3 และ -2 ในหลักที่ 2 ของเมทริกซ์ A

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

ให้ Z เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ที่มีสมาชิกเกิดจากการแทน 5 , -3 และ -2 ในหลักที่ 3 ของเมทริกซ์ A

$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-2)(-3) + (1)(2)(1) + (-1)(3)(-3) \\ - (1)(-2)(-1) - (-3)(2)(2) - (-3)(3)(1)$$

$$\det A = 12 + 2 + 9 - 2 + 12 + 9 = 42$$



$$\begin{aligned}
 \det X &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow 5 \nearrow 1 \\ \nearrow -3 \nearrow -2 \\ \nearrow -2 \nearrow -3 \end{matrix} \\
 &= (5)(-2)(-3) + (1)(2)(-2) + (-1)(-3)(-3) \\
 &\quad - (-2)(-2)(-1) - (-3)(2)(5) - (-3)(-3)(1)
 \end{aligned}$$

$$\det X = 30 - 4 - 9 + 4 + 30 - 9 = 42$$

$$\begin{aligned}
 \det Y &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow 2 \nearrow 5 \\ \nearrow 3 \nearrow -3 \\ \nearrow 1 \nearrow -2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$= (2)(-3)(-3) + (5)(2)(1) + (-1)(3)(-2) \\ - (1)(-3)(-1) - (-2)(2)(2) - (-3)(3)(5)$$

$$\det Y = 18 + 10 + 6 - 3 + 8 + 45 = 84$$

$$\det Z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \nearrow -2 \\ \nearrow -3 \end{matrix}$$

$$= (2)(-2)(-2) + (1)(-3)(1) + (5)(3)(-3) \\ - (1)(-2)(5) - (-3)(-3)(2) - (-2)(3)(1)$$

$$\det Z = 8 - 3 - 45 + 10 - 18 + 6 = -42$$

จากกฎของคราเมอร์

$$x = \frac{\det X}{\det A} = \frac{42}{42}$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{\det Y}{\det A} = \frac{84}{42}$$

$$y = 2$$

$$z = \frac{\det Z}{\det A} = \frac{-42}{42}$$

$$z = -1$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $x = 1$, $y = 2$ และ $z = -1$