



หน่วยที่

9

$$2 + 5 =$$

$$\frac{4}{2}$$

$$\sqrt{7}$$

ดีเทอร์มิแนนต์



สารบัญ



ถัดไป



การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยวิธีการคูณทแยง

กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{n \times n}$
แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A|$ ซึ่งสามารถ
หาได้ดังนี้

❶ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 1×1 คือ สมาชิกที่อยู่ใน
เมทริกซ์จัตุรัส 1×1 กล่าวคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{1 \times 1}$ แล้ว $|A| = a_{ij}$

$$\begin{array}{lclclclcl} \text{เช่น } A & = & [3] & \text{จะได้} & |A| & = & 3 \\ B & = & [-2.5] & \text{จะได้} & |B| & = & -2.5 \end{array}$$

๒ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 2×2 คือ ผลต่างของผลคูณระหว่างสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักกับผลคูณสมาชิกที่ไม่ได้อยู่บนเส้น

ทแยงมุมหลัก กล่าวคือ ถ้า $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้วจะได้ $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

นั่นคือ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$



ตัวอย่างที่ 1

หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2) B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$1) |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - (-1)3 = 7$$

$$2) |B| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2(0) - (-3)(-5) = -15$$



ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่า x จากสมการ

$$\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$(4)(5) - (2)(2x) = 4$$

$$20 - 4x = 4$$

$$-4x = 4 - 20 = -16$$

$$x = \frac{-16}{-4} = 4$$



③ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 3×3

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 3×3 สามารถใช้วิธีคูณทแยงได้ โดยการนำหลักที่ 1 และ 2 มาต่อเป็นหลักที่ 4 และ 5 แล้วนำผลบวกจากการคูณสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากบนซ้ายมาล่างขวาลบด้วยผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากล่างซ้ายไปบนขวา

$$\text{กล่าวคือ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

+ + +

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

จะได้ $|A| =$

$$|A| = 20 + 0 - 9 - (-2) - 18 - 0 = -5$$

หรือ $|A| = (20 + 0 - 9) - (-2 + 18 + 0) = -5$

ตัวอย่างที่ 4

จงหาค่า x ที่ทำให้
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ x & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ x & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ x & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$0 + 4 + 3x - 0 - 8 - 2x = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x = 4$$





สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $k \neq 0$ จะได้ว่า

❶ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็นศูนย์ทั้งหมดแล้ว $\det A = 0$

$$\begin{array}{lcl} \text{เช่น } A & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ B & = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$



② ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเหมือนกันสองแถว (หรือสองหลัก) แล้ว $\det A = 0$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (หลักที่ 1 = หลักที่ 3)} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

③ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีแถวหนึ่งเป็น k เท่าของอีกแถวหนึ่ง หรือหลักหนึ่งเป็น k เท่าของอีกหลักหนึ่งแล้ว $\det A = 0$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } A &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & -3 \end{bmatrix} && \text{เนื่องจากหลักที่หนึ่งเป็น 3 เท่าของหลักที่สาม} \\ \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (9 - 18 + 12) - (9 + 12 - 18) = 0 \end{aligned}$$



4 ถ้าเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง (หรือสลับหลักคู่ใดคู่หนึ่ง) ของ A แล้วจะได้ $\det B = -\det A$

สลับแถวที่ i และแถวที่ j แทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$

สลับหลักที่ i และหลักที่ j แทนด้วย $C_i \leftrightarrow C_j$

เช่น
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ ให้ } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

โดยที่ B เกิดจาก $R_1 \leftrightarrow R_2$ ของ A

จากการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์จะได้

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 48 - 36 = 12$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 48 = -12$$

ดังนั้น $\det B = -\det A$



๕ ถ้าเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เกิดจากการคูณแต่ละสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $\det B = k \det A$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 12 \text{ และ } k = -2$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ เกิดจาก } (-2) C_1 \text{ ของ } A$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (-72 - 24 + 0) - (-24 - 48 + 0)$$

$$= -24 = (-2)(12)$$

$$= (-2) \det A$$

$$\text{ดังนั้น } \det B = (-2) \det A$$



6 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ แล้ว $\det A = \det A^t$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } \det A^t = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

ดังนั้น $\det A = \det A^t$

7 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ แล้ว $\det AB = \det A \cdot \det B$

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -7$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 1$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det AB = -7$$

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$



๘ ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และเมทริกซ์ B เกิดจากการคูณเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $\det B = k^n \det A$ หรือ $\det kA = k^n \det A$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \text{ และ } k = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2A \Rightarrow \det B = 16$$

$$\text{ดังนั้น } \det(B) = (2)^3 \det(A)$$

๙ ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และเมทริกซ์ B เกิดจากการนำจำนวนจริง k คูณแถวที่ s หรือหลักที่ s ของ A แล้วนำไปบวกเพิ่มไว้ในแถวที่ r หรือหลักที่ r ของ A โดยที่ $s \neq r$ แทนด้วย $kR_s + R_r$ หรือ $kC_s + C_r$ แล้ว $\det B = \det A$

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -12 \text{ และ } k = -2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{เกิดจาก } R_3 - 2R_1 \text{ ของ } A$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-8 + 2 - 27) - (6 - 3 - 24) = -12$$

ดังนั้น $\det B = \det A$

10 ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ แล้ว $\det A^n = (\det A)^n$

เช่น $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ คูณกัน n เมทริกซ์

$\det A^n = \det (A \cdot A \cdot A \cdots A)$

$= (\det A)(\det A)(\det A) \cdots (\det A)$

$\det A^n = [\det A]^n$

11 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และเป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยม แล้ว $\det(A)$ เท่ากับผลคูณของสมาชิก ในแนวทแยงมุมหลัก

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (1)(2)(-4) = -8$$

ถ้า I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ แล้ว $\det(I_n) = 1$

$$\text{เช่น } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det I = 1$$

