



หน่วยที่

6

$$2 + 5 = \frac{4}{2}$$

$\sqrt{7}$

$$p = \cos \times \tan$$

$$S = \frac{1}{n}$$

เมทริกซ์



สารบัญ



ถัดไป



ความหมายของเมทริกซ์

เมทริกซ์เป็นเรื่องที่สำคัญเรื่องหนึ่งในการศึกษาคณิตศาสตร์ เมทริกซ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการแก้ปัญหาทางวิชาชีพ และชีวิตประจำวัน ซึ่งปกติในชีวิตประจำวันของเรามักจะได้พบเห็นหรือเกี่ยวข้องกับเมทริกซ์อยู่เสมอ เพียงแต่ไม่ได้เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเมทริกซ์ เช่น การบันทึกข้อมูลจากการขายสินค้าประเภทเครื่องใช้ไฟฟ้า ดังตาราง

ปริมาณการขายสินค้าประจำเดือน มกราคม

	กระติกน้ำร้อน (ใบ)	พัดลม (ตัว)	หม้อหุงข้าว (ใบ)
ร้านที่ 1	27	53	34
ร้านที่ 2	30	42	40



จากข้อมูลที่บันทึกในตาราง เป็นปริมาณการขายสินค้าของแต่ละร้าน
นำมาบันทึกในวงเล็บได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 27 & 53 & 34 \\ 30 & 42 & 40 \end{bmatrix}$$

ลักษณะการเขียนในวงเล็บข้างต้นนี้เรียกว่าเมทริกซ์ (Matrix) สิ่งที่อยู่ในวงเล็บเรียกว่าสมาชิกของเมทริกซ์ บรรทัดแรกเป็นข้อมูลการขายสินค้าร้านที่ 1 ได้แก่ กระทิกน้ำร้อน 27 ใบ พัดลม 53 ตัว และหม้อหุงข้าว 34 ใบ บรรทัดที่สองเป็นข้อมูลการขายสินค้าร้านที่ 2 ได้แก่ กระทิกน้ำร้อน 30 ใบ พัดลม 42 ตัว และหม้อหุงข้าว 40 ใบ

ในแต่ละบรรทัด เรียกว่า แถว (row) แสดงจำนวนสินค้าของแต่ละร้าน และแสดงข้อมูลเป็นหลัก (column) โดยที่แต่ละหลักแสดงจำนวนสินค้าแต่ละประเภท

	หลักที่ 1	หลักที่ 2	หลักที่ 3
แถวที่ 1 →	27	53	34
แถวที่ 2 →	30	42	40

ตำแหน่งของสมาชิกมีความสำคัญ จะสลับที่กันไม่ได้ เช่น สมาชิกแถวที่ 1 หลักที่ 2 คือ 53 แสดงถึงร้านที่ 1 ขายพัดลม 53 ตัว สมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ 30 แสดงถึงร้านที่ 2 ขายกระติกน้ำร้อน 30 ใบ

เมทริกซ์ ของจำนวนจริง คือรูปแบบการเขียนจำนวนจริงโดยเขียนให้เป็นแถว (row) และเขียนให้เป็นหลัก (column) แต่ละแถวมีจำนวนหลักเท่ากัน เขียนอยู่ภายในวงเล็บ [] หรือ () จำนวนที่อยู่ในเมทริกซ์ เรียกว่า สมาชิกของเมทริกซ์

เช่น
$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ข้างต้นมี 2 แถว 3 หลัก สมาชิกแถวที่ 1 ได้แก่ 3, 9 และ 1 สมาชิกแถวที่ 2 ได้แก่ 0, 2 และ -3 สมาชิกหลักที่ 1 ได้แก่ 3 และ 0 สมาชิกหลักที่ 2 ได้แก่ 9 และ 2 สมาชิกหลักที่ 3 ได้แก่ 1 และ -3

จำนวนแถวและหลักจะแสดงมิติของเมทริกซ์ ดังนั้นเมทริกซ์ที่กล่าวนี้มี 2 แถว 3 หลัก นั่นคือ มีมิติเท่ากับ 2×3

กำหนดเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ที่มี 3 แถว 2 หลัก นั่นคือ มีมิติเท่ากับ 3×2

$[5 \ 0 \ 2 \ 4]$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 1 แถว 4 หลัก นั่นคือ มีมิติเท่ากับ 1×4

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 2 หลัก นั่นคือ มีมิติเท่ากับ 2×2



มิติและการเขียน เมทริกซ์ในรูปทั่วไป

สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n ใด ๆ เรียกเมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลักว่า $m \times n$ เมทริกซ์ (อ่านว่า เอ็มคูณเอ็นเมทริกซ์ หรือ เมทริกซ์เอ็มคูณเอ็น) และเรียก $m \times n$ ว่า ขนาดหรือมิติของเมทริกซ์ (order) ซึ่งมีสมาชิก $m \times n$ จำนวน

เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงเมทริกซ์ ใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ $A, B, C, \dots$ แทน เมทริกซ์ และอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก $a, b, c, \dots$ ที่มีตัวเลขสองตัวกำกับไว้ทางด้านขวา ในระดับต่ำกว่าเล็กน้อย แทนสมาชิกของเมทริกซ์ $A, B, C, \dots$ ตามลำดับ โดยตัวเลขที่กำกับไว้ตัวแรก แทนตำแหน่งของแถว และตัวเลขตัวที่สองแทนตำแหน่งของหลัก



รูปทั่วไปของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A มีมิติเท่ากับ $m \times n$ มี a เป็นสมาชิก

นั่นคือ

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$

ตัวอย่างที่ 1

จากการสำรวจคนกลุ่มหนึ่งเกี่ยวกับการใช้บัตรเครดิตในการทำธุรกรรมทางการเงิน
ปรากฏผลดังตาราง

การทำธุรกรรมการเงิน อายุ (ปี)	มีบัตรเครดิต	ไม่มีบัตรเครดิต
21 - 25	28	32
26 - 30	30	36
31 - 35	45	34

(1) จงเขียนเมทริกซ์ A แทนข้อมูลในตาราง
วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 32 \\ 30 & 36 \\ 45 & 34 \end{bmatrix}$$

(2) มิติของเมทริกซ์ A

วิธีทำ

เมทริกซ์ A มีมิติ 3×2

(3) ผลรวมของสมาชิกในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A เป็นข้อมูลอะไร

วิธีทำ ผลรวมของสมาชิกในหลักที่ 1 = 28 + 30 + 45
= 103

ผลรวมของสมาชิกในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A เป็นข้อมูลจำนวนผู้ที่มีบัตรเครดิต

(4) ผลรวมของสมาชิกในแถวที่ 3 ของเมทริกซ์ A และเป็นข้อมูลอะไร

วิธีทำ ผลรวมของสมาชิกในแถวที่ 3 = $45 + 34$
= 79

ผลรวมของสมาชิกในแถวที่ 3 ของเมทริกซ์ A เป็นข้อมูล จำนวนผู้ที่มีอายุ ระหว่าง 31-35 ปี

ตัวอย่างที่ 2

กำหนด A เป็นเมทริกซ์ มีมิติ 3×2 โดยที่ $a_{ij} = 2i - j$ ทุกๆ ค่า ของ i และ j จงเขียนเมทริกซ์ A

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} (2 \times 1) - 1 & (2 \times 1) - 2 \\ (2 \times 2) - 1 & (2 \times 2) - 2 \\ (2 \times 3) - 1 & (2 \times 3) - 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$





เมทริกซ์ชนิดต่างๆ ที่ควรรวบรวม

- ① เมทริกซ์แถว (Row Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีแถวเพียงแถวเดียว

เช่น $[1 \ 0 \ 3 \ -4]$, $[1 \ -1]$

- ② เมทริกซ์หลัก (Column Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีหลักเพียงหลักเดียว

เช่น $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- ③ เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์หมด
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\underline{0}$ หรือ $[0]_{m \times n}$

เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0 \ 0 \ 0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



④ เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน
นั่นคือเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [1]$$

⑤ เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกใต้
เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$



⑥ เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

เช่น $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

⑦ เมทริกซ์ทแยงมุมหรือเมทริกซ์เฉียง (Diagonal Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกเหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด (ส่วนสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักจะมีค่าเท่ากับเท่าใดก็ได้)

เช่น $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

๘ เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar Matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเท่ากันทุกตัว

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

๙ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix หรือ Unit Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 และสมาชิกตัวอื่นๆ เป็น 0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I_n

$$\text{เช่น } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ มิติ } 2 \times 2$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ มิติ } 3 \times 3$$

10 เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix หรือ Null Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทน

ด้วยสัญลักษณ์ 0

เช่น $[0 \ 0 \ 0]$ เป็นเมทริกซ์มิติ 1×4

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ มิติ 2×2

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3





ทรานสโพสของเมทริกซ์

บทนิยาม

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ หรือ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ทรานสโพสของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^T หรือ A^t อ่านว่า ทรานสโพสของเมทริกซ์ เอ

$$A^t = [b_{ij}]_{n \times m} \text{ โดยที่ } b_{ij} = a_{ji}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3 \dots, n$ และ $j = 1, 2, 3 \dots, m$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ดังนั้น } A^T = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 5 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$





การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเดียวกัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ จะกล่าวว่า A เท่ากับ B แทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $m = p$, $n = q$ และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกๆ ค่าของ i และ j

เช่น 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{9} \\ \frac{4}{2} & 2^2 \end{bmatrix}$, จะได้ว่า $A = B$

2) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = [0]$ ดังนั้น $A \neq B$ เพราะว่ามีมิติไม่เท่ากัน

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $x = -2$ และ $y = 3$

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้
$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 14 & 0 \\ 3 & z+5 \end{bmatrix}$$

จงหาค่า x , y และ z

วิธีทำ เมทริกซ์ที่เท่ากัน สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันจะเท่ากัน
ดังนั้น

$$x = 5 \quad \text{..... ①}$$

$$2y = 14 \quad \text{..... ②}$$

$$z + 5 = 2 \quad \text{..... ③}$$

จากสมการ ② ; $y =$

$$y = 7$$

จากสมการ ③ ; $z = 2 - 5$

$$z = -3$$

ดังนั้น $x = 5$, $y = 7$ และ $z = -3$