



หน่วยที่

5

$$2 + 5 = \frac{4}{2}$$

$\sqrt{}$

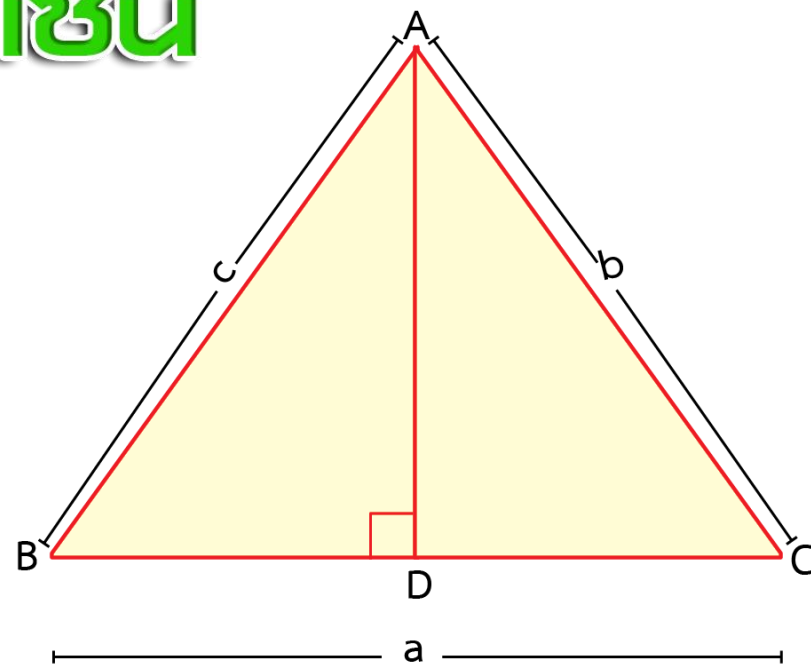
กฎของไซน์และ กฎของโคไซน์





กฎของไซน์

การหาความยาวของด้าน และ
ขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม โดย
ที่ไม่จำเป็นต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมมุม
ฉาก โดยใช้กฎของไซน์ ซึ่งกล่าวถึง
อัตราส่วนระหว่างความยาวด้านของรูป
สามเหลี่ยม และไซน์ของมุม ที่อยู่ตรง
ข้ามกับด้านนั้น



พิจารณารูป สามเหลี่ยม **ABC** ซึ่งมี **A, B** และ **C** เป็นจุดยอดมุม **a, b, c**
เป็นความยาวด้าน **BC, AC** และ **AB** ตามลำดับ



AD ตั้งฉากกับ BC และเป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD

$$\sin B = \frac{AD}{AB}$$

$$\sin B = \frac{AD}{c}$$

ดังนั้น $AD = c \sin B$

รูปสามเหลี่ยม ABC หาพื้นที่ เมื่อ BC เป็นฐาน และ AD เป็นส่วนสูง

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin B$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม **ABC** เมื่อ **AB** เป็นฐาน
ของรูปสามเหลี่ยม หรือ **AC** เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2} bc \sin A$

$$= \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

เมื่อ นำ $\frac{1}{2} abc$ ทหาร

$$\frac{\frac{1}{2} bc \sin A}{\frac{1}{2} abc}$$

=

$$\frac{\frac{1}{2} ac \sin B}{\frac{1}{2} abc}$$

=

$$\frac{\frac{1}{2} ab \sin C}{\frac{1}{2} abc}$$

$$\frac{\sin A}{a}$$

=

$$\frac{\sin B}{b}$$

=

$$\frac{\sin C}{c}$$



เขียนกฎของไซน์ ดังนี้

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

กฎของไซน์ สามารถนำไปใช้ในการหาความยาวด้าน หรือมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม โดยโจทย์อาจกำหนดความยาวด้าน หรือมุมของรูปสามเหลี่ยมเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1

เมื่อกำหนดขนาดของมุม 2 มุม และความยาว 1 ด้าน

กรณีที่ 2

เมื่อกำหนดความยาวของด้าน 2 ด้าน และมุม 1 มุม ซึ่งไม่ใช่มุมที่อยู่ระหว่างด้านที่กำหนด

กรณีนี้ที่ 1

เมื่อกำหนดขนาดของมุม 2 มุม และความยาว 1 ด้าน

ตัวอย่างที่ 1

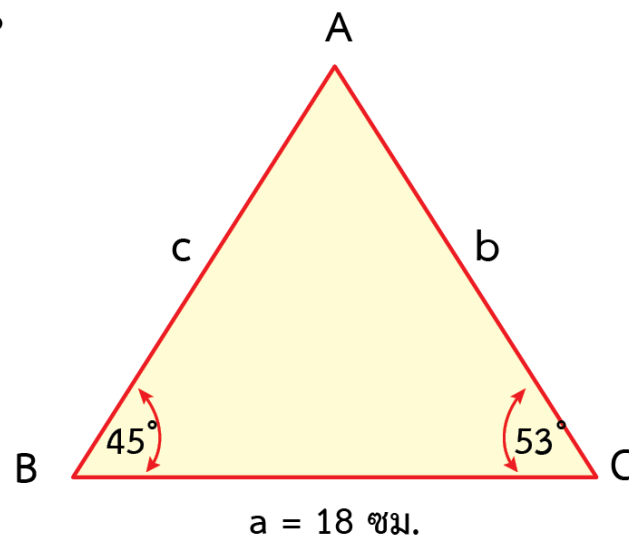
จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ มุม B ขนาด 45 องศา
มุม C ขนาด 53 องศา ด้าน a ยาว 18 เซนติเมตร จงหา
ความยาวด้าน b และด้าน c

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{จากโจทย์ ขนาดของมุม A} &= 180^\circ - 45^\circ - 53^\circ \\ &= 82^\circ\end{aligned}$$

จากกฎของไซน์

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \frac{18}{\sin 82^\circ} &= \frac{b}{\sin 45^\circ} \\ b &= \frac{18 \times \sin 45^\circ}{\sin 82^\circ}\end{aligned}$$



จากกฎของไซน์

$$= \frac{18 \times 0.7071}{0.9903}$$

$$b = 12.85 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{18}{\sin 82^\circ} = \frac{c}{\sin 53^\circ}$$

$$c = \frac{18 \times \sin 53^\circ}{\sin 82^\circ}$$

$$= \frac{18 \times 0.7986}{0.9903}$$

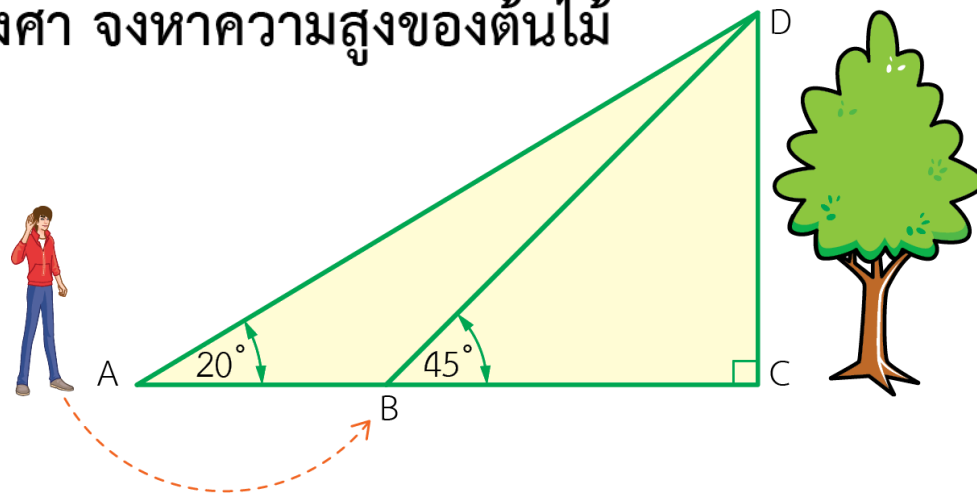
$$c = 14.52 \text{ เซนติเมตร}$$

ดังนั้น ความยาวด้าน b เท่ากับ 12.85 เซนติเมตร
และด้าน c เท่ากับ 14.52 เซนติเมตร



ตัวอย่างที่ 2

นายสนั่นยืนอยู่บนพื้นราบ มองไปที่ยอดต้นไม้เป็นมุม 20 องศา
ถ้าเขาเดินเข้าใกล้ต้นไม้มากขึ้น 70 ฟุต มองไปที่จุดเดิม เป็นมุม
45 องศา จงหาความสูงของต้นไม้



วิธีทำ รูปสามเหลี่ยม ABD

$$\text{มุม ABD เท่ากับ } 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\text{มุม ADB เท่ากับ } 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

จากรูปสามเหลี่ยม ABD กฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\frac{BD}{\sin 20^\circ} = \frac{AB}{\sin 25^\circ}$$

$$\frac{BD}{0.3420} = \frac{70}{0.4226}$$

$$BD = \frac{70 \times 0.3420}{0.4226}$$

$$BD = 56.65 \text{ ฟุต}$$

จากรูปสามเหลี่ยม BCD

$$\sin 45^\circ = \frac{DC}{BD}$$

$$0.7071 = \frac{DC}{56.65}$$

$$DC = 56.65 \times 0.7071$$

ดังนั้น ความสูงของต้นไม้ เท่ากับ 40.06 ฟุต

กรณีี่ 2

เมื่อกำหนดความยาวของด้าน 2 ด้าน และมุม 1 มุม ซึ่งไม่ใช่มุมที่อยู่ระหว่างด้านที่กำหนด

ตัวอย่างที่ 3

ในรูปสามเหลี่ยม ABC กำหนดให้มุม B มีขนาด 45 องศา
ด้าน $b = 2\sqrt{2}$ และ ด้าน $c = 2\sqrt{3}$ จงหาขนาดมุม A และมุม C

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{จาก } \frac{b}{\sin B} &= \frac{c}{\sin C} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sin C} \\ \sin C &= \frac{2\sqrt{3} \times \sin 45^\circ}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$



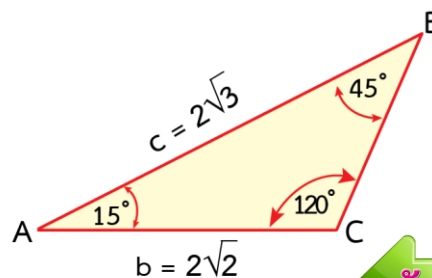
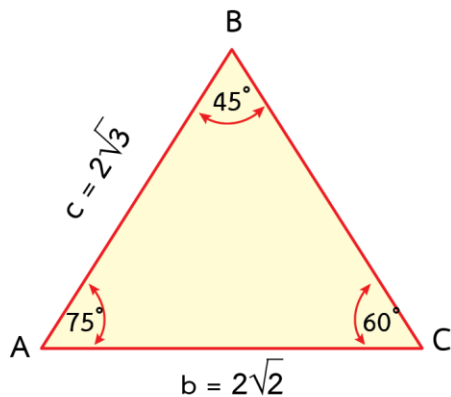
$$\begin{aligned} \sin C &= \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sin 60^\circ \text{ หรือ } \sin 120^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้น มุม $C = 60^\circ$ หรือ 120°

ถ้า มุม $C = 60^\circ$ แล้ว มุม $A = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

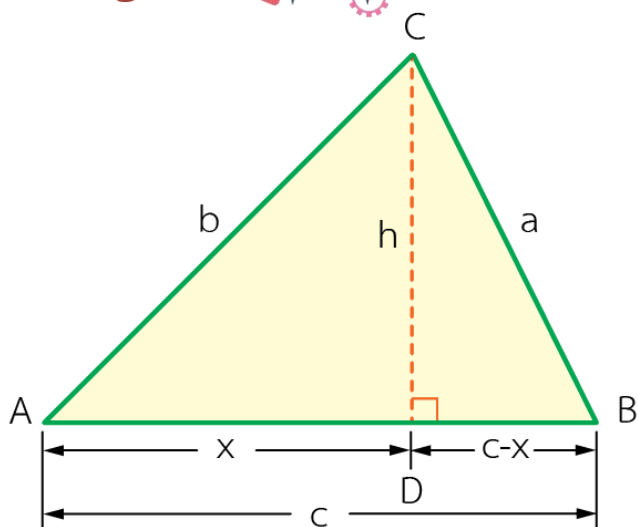
ถ้า มุม $C = 120^\circ$ แล้ว มุม $A = 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) = 15^\circ$

เขียนรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ 2 ลักษณะ ดังนี้





กฎของโคไซน์



$$\triangle ADC ; h^2 = b^2 - x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle BDC ; h^2 = a^2 - (c - x)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

จาก ① และ ②

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx \quad \dots \textcircled{3}$$

จากรูป $\triangle ADC ; x = b \cos A$

แทนค่า $x = b \cos A$ ใน ③

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2c(b \cos A)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cos A$$

ดังนั้น $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ในทำนองเดียวกัน สามารถหาค่า b และ c ดังนี้

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า กฎของโคไซน์

จากกฎของโคไซน์ สามารถหาค่า $\cos A$ $\cos B$ และ $\cos C$ ได้ดังนี้

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

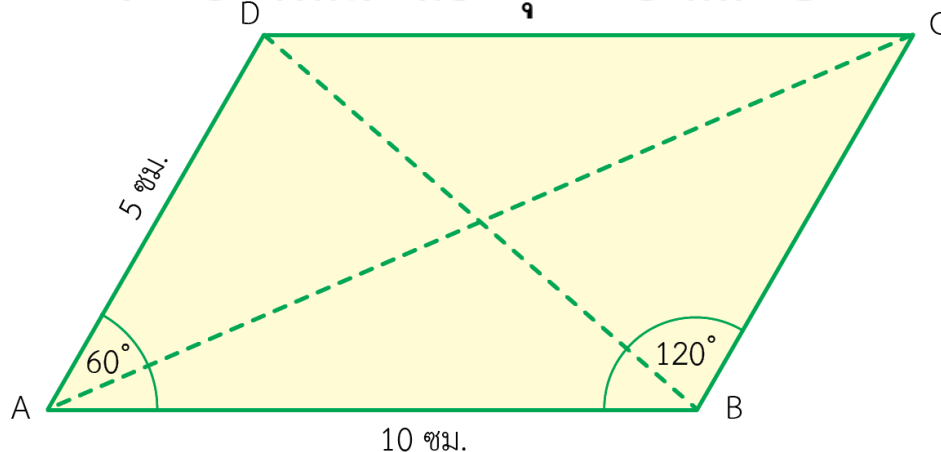
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีมุม $A = 60^\circ$,
มุม $B = 120^\circ$, $AD = 5$ เซนติเมตร $AB = 10$ เซนติเมตร
จงหาความยาวเส้นทแยงมุม AC และ BD



วิธีทำ

ในรูปสามเหลี่ยม ABC จากกฎโคไซน์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cos B \\ &= (10)^2 + (5)^2 - 2(10)(5) \cos 120^\circ \\ &= 100 + 25 - 100 \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$



$$AC^2 = 175$$

$$AC = \sqrt{175} \approx 13.23$$

ดังนั้น ความยาวเส้นทแยงมุม AC เท่ากับ 13.23 เซนติเมตร
 ในรูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎโคไซน์ จะได้ว่า

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 AD \cdot AB \cos A$$

$$= (5)^2 + (10)^2 - 2(5)(10) \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 100 - 100 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$BD^2 = 75$$

$$BD = \sqrt{75} \approx 8.66$$

ดังนั้น ความยาวเส้นทแยงมุม BD เท่ากับ 8.66 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5

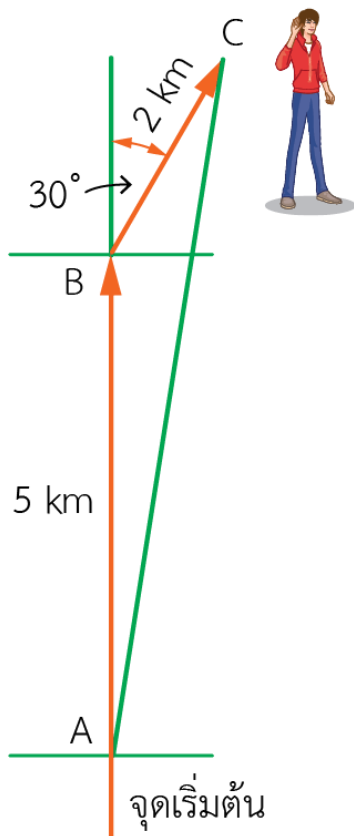
นายกิตติคุณเดินทางไปทางทิศเหนือ 5 กิโลเมตร แล้วเดินไป ในทิศ 30° กับทิศเหนือ ไปทางตะวันออกอีก 2 กิโลเมตร อยากทราบว่าเขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าไร

วิธีทำ

ในรูปสามเหลี่ยม ABC

$$\begin{aligned}\text{มุม } ABC &= 180^\circ - 30^\circ \\ &= 150^\circ\end{aligned}$$

ด้าน AC เป็นระยะห่างที่นายกิตติคุณอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น จากกฎของโคไซน์



$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \hat{ABC} \\ &= (5)^2 + (2)^2 - 2(5)(2) \cos (180^\circ - 30^\circ) \\ &= (5)^2 + (2)^2 + 2(5)(2) \cos 30^\circ \\ &= 25 + 4 + (20)(0.8660) \\ AC^2 &= 46.32 \\ AC &= 6.81 \text{ กิโลเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น นายกิตติคุณอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น 6.81 กิโลเมตร

