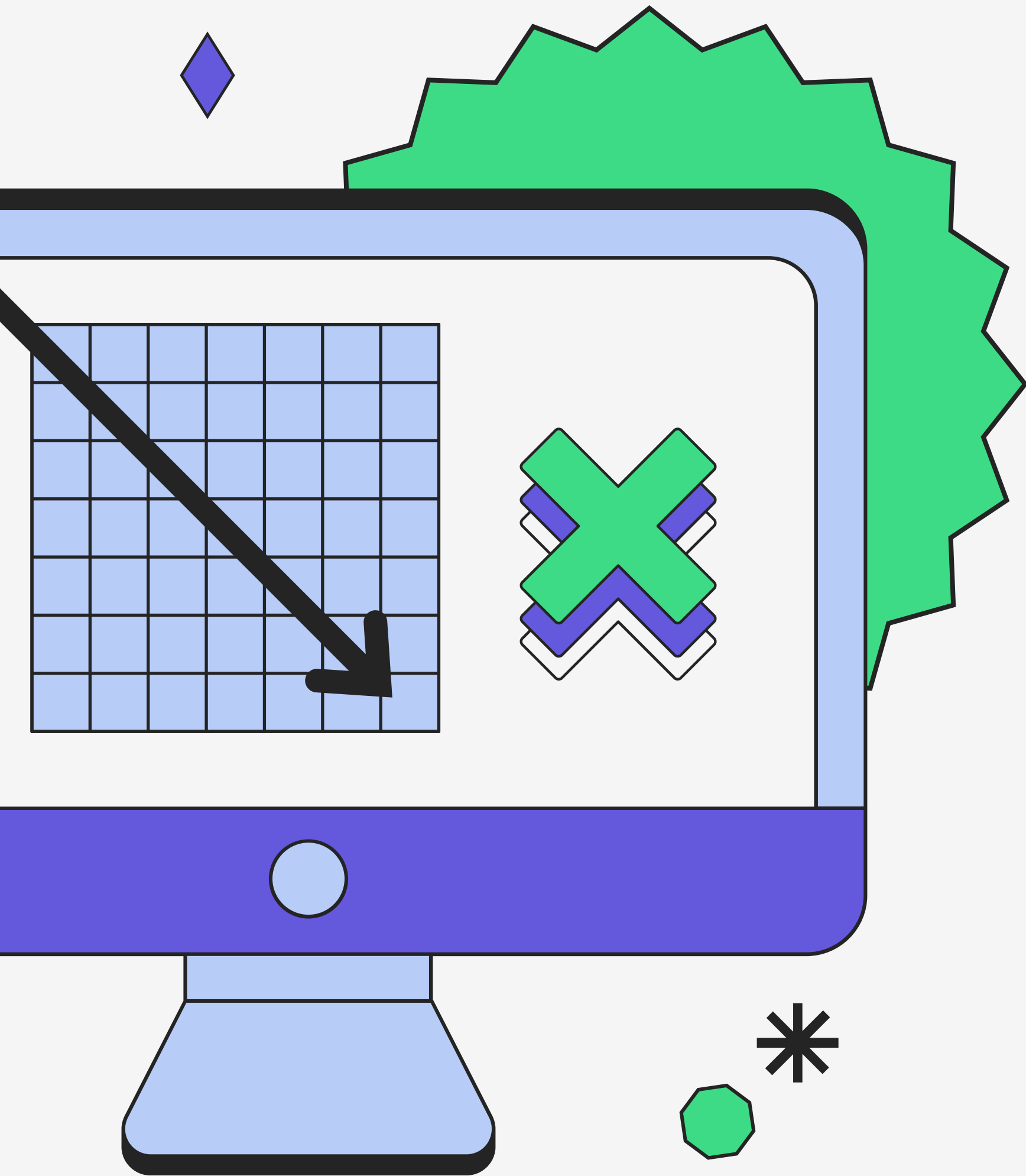


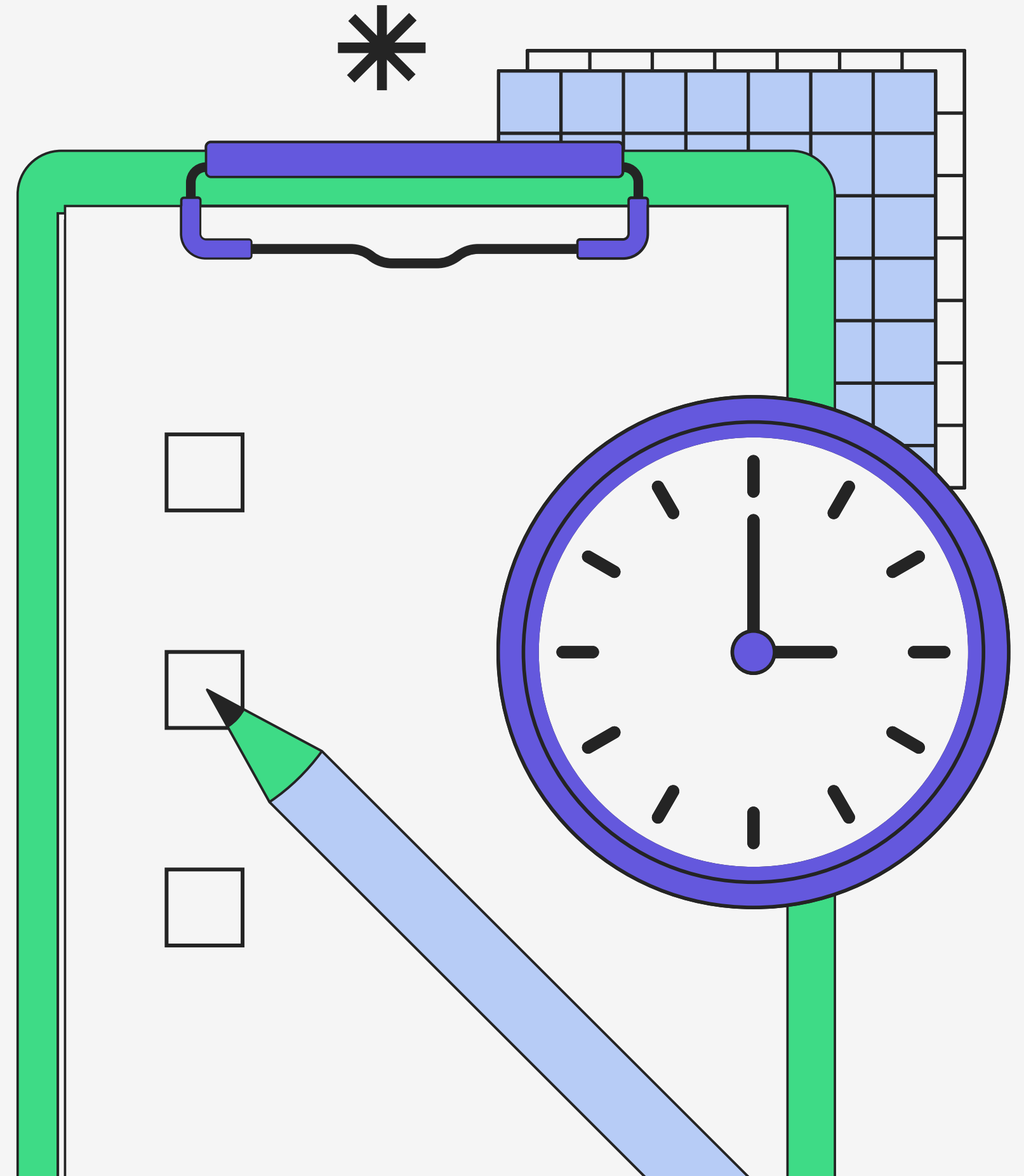


บทเรียนที่ 6

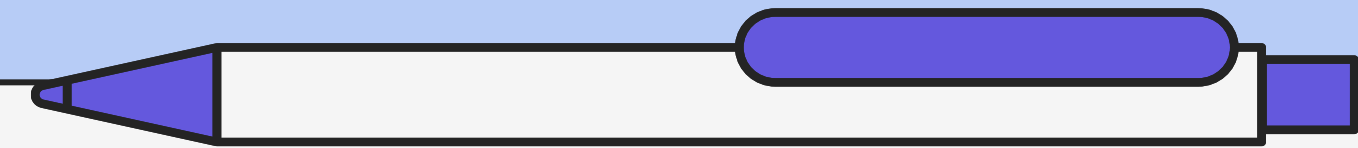
ระบบสมการ
เชิงเส้นสอง
ตัวแปร

สาระการเรียนรู้

- ความหมายของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
- ความหมายของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้กราฟ
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีการแทนค่า
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีการกำจัดตัวแปร
- โจทย์ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



ความหมายของสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร



จากที่นักเรียนได้ศึกษาวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวมาแล้ว

$$\text{เช่น } 2x + 1 = 5 \dots\dots 1$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

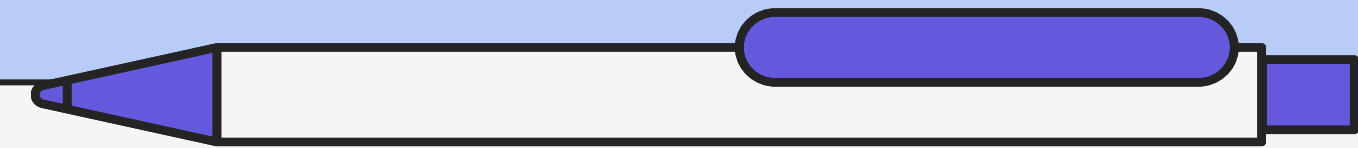
จะเห็นว่าคำตอบของสมการมีเพียงค่าเดียว คือ $x = 2$ และจากสมการข้างต้น

ถ้าเปลี่ยน 1 เป็น y จะได้สมการดังนี้

$$2x + y = 5 \dots\dots 2$$

เรียกสมการ 2 นี้ว่า **สมการเชิงเส้นสองตัวแปร (Linear equation with two variables)**

ความหมายของสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร



สมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ สมการที่มีตัวแปรสองตัว เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นหนึ่ง และไม่มีการคูณกันระหว่างตัวแปร

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ $ax + by + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว โดย a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

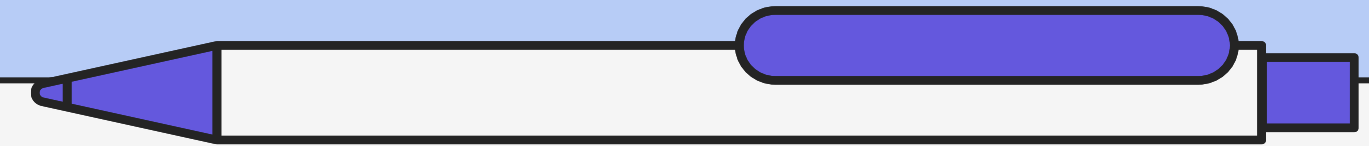
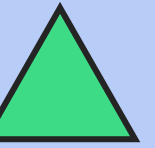
พิจารณาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $2x + y = 5$

เช่น ถ้า $y = 1$ ค่า x ที่สอดคล้องกับ $2x + 1 = 5$ คือ $x = 2$

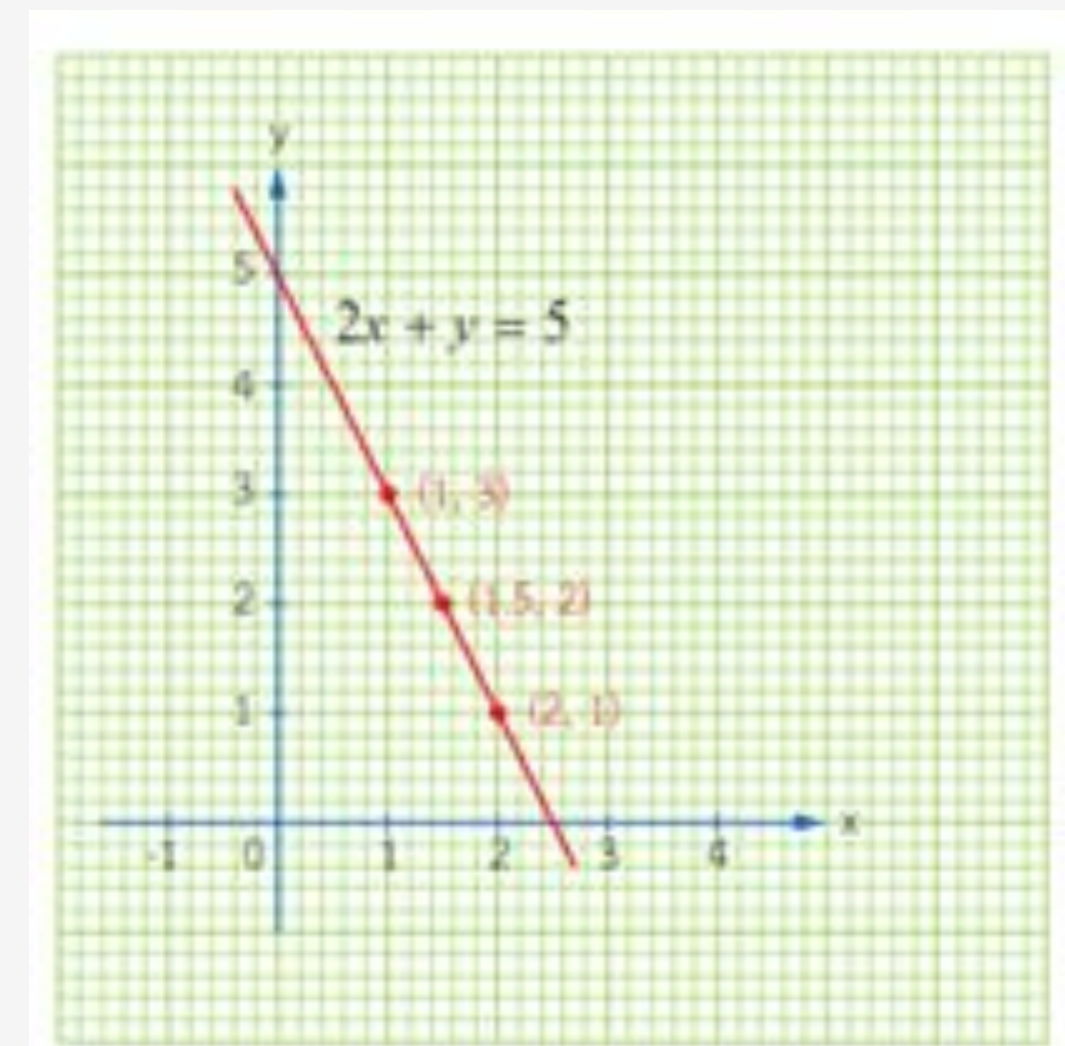
ถ้า $y = 2$ ค่า x ที่สอดคล้องกับ $2x + 2 = 5$ คือ $x = 1.5$

ถ้า $y = 3$ ค่า x ที่สอดคล้องกับ $2x + 3 = 5$ คือ $x = 1$

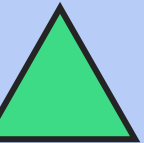
ความหมายของสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร



ค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ
 $2x + y = 5$ มีมากมาย เขียนเป็นคู่อันดับ
 (x, y) ได้แก่ $(2, 1)$, $(1.5, 2)$, $(1, 3)$, ...
นำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



ความหมายของสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดสมการ $3x + y = 6$

1. จงเขียนกราฟของสมการ โดยกำหนด $0 \leq x \leq 2$
2. จากกราฟจงหาค่า y เมื่อ $x = 0.5$

วิธีทำ

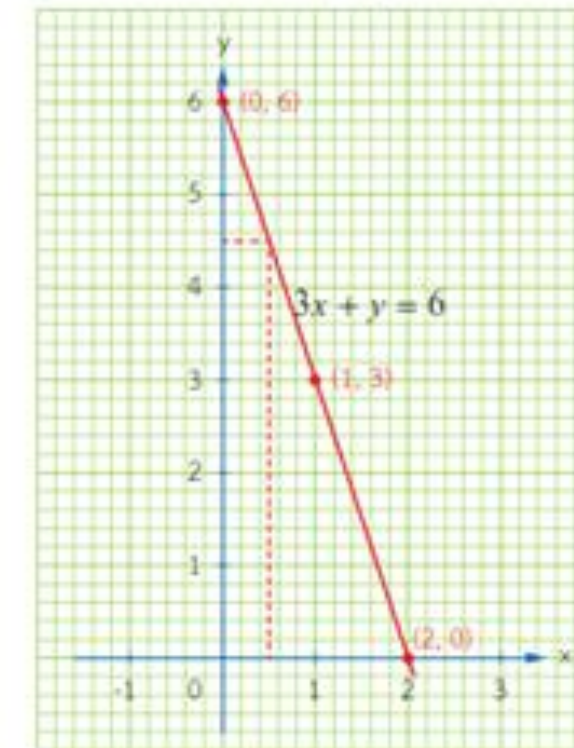
1. กำหนดค่า x เป็น 0, 1, 2 และแทนค่าในสมการเพื่อหาค่า y

เมื่อ $x = 0$	เมื่อ $x = 1$	เมื่อ $x = 2$
$3(0) + y = 6$	$3(1) + y = 6$	$3(2) + y = 6$
$y = 6$	$y = 6 - 3$	$y = 6 - 6$
	$y = 3$	$y = 0$

นำมาเขียนในรูปตาราง

x	0	1	2
y	6	3	0

จะได้กราฟของสมการ $3x + y = 6$ ดังนี้



* อ่านค่าจากกราฟ
จาก $x = 0.5$ ลากเส้นประ
ไปยังกราฟแล้วอ่านค่า
ที่แกน Y จะได้ $y = 4.5$

จากกราฟ เมื่อ $x = 0.5$ ค่า y จะเท่ากับ 4.5

ความหมายของสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร



การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร นอกจากจะใช้การกำหนดค่า x และหาค่า y ที่สอดคล้องกับสมการแล้ว อีกวิธีที่สะดวกและรวดเร็ว คือ การหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน X และจุดที่เส้นตรงตัดแกน Y

จากรูปทั่วไปของสมการ

$$ax + by = c$$

1. หาจุดตัดบนแกน X นั่นคือ $y = 0$

$$ax + b(0) = c$$

$$x = \frac{c}{a}$$

จุดตัดบนแกน X คือ $(\frac{c}{a}, 0)$

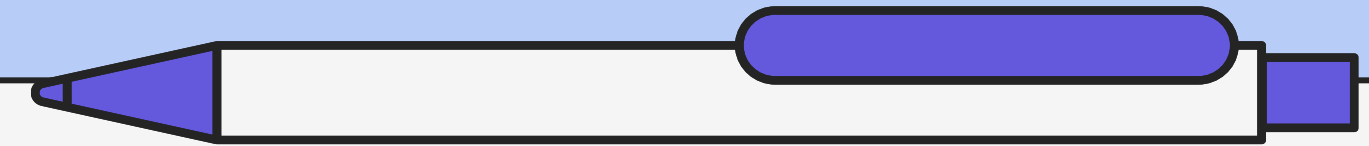
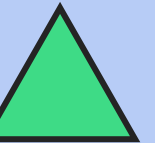
2. หาจุดตัดบนแกน Y นั่นคือ $x = 0$

$$a(0) + by = c$$

$$y = \frac{c}{b}$$

จุดตัดบนแกน Y คือ $(0, \frac{c}{b})$

ความหมายของสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการ $x + 2y = 6$

วิธีทำ

$$x + 2y = 6$$

ให้ $y = 0$ แทนในสมการ

$$x + 2(0) = 6$$

$$x = 6$$

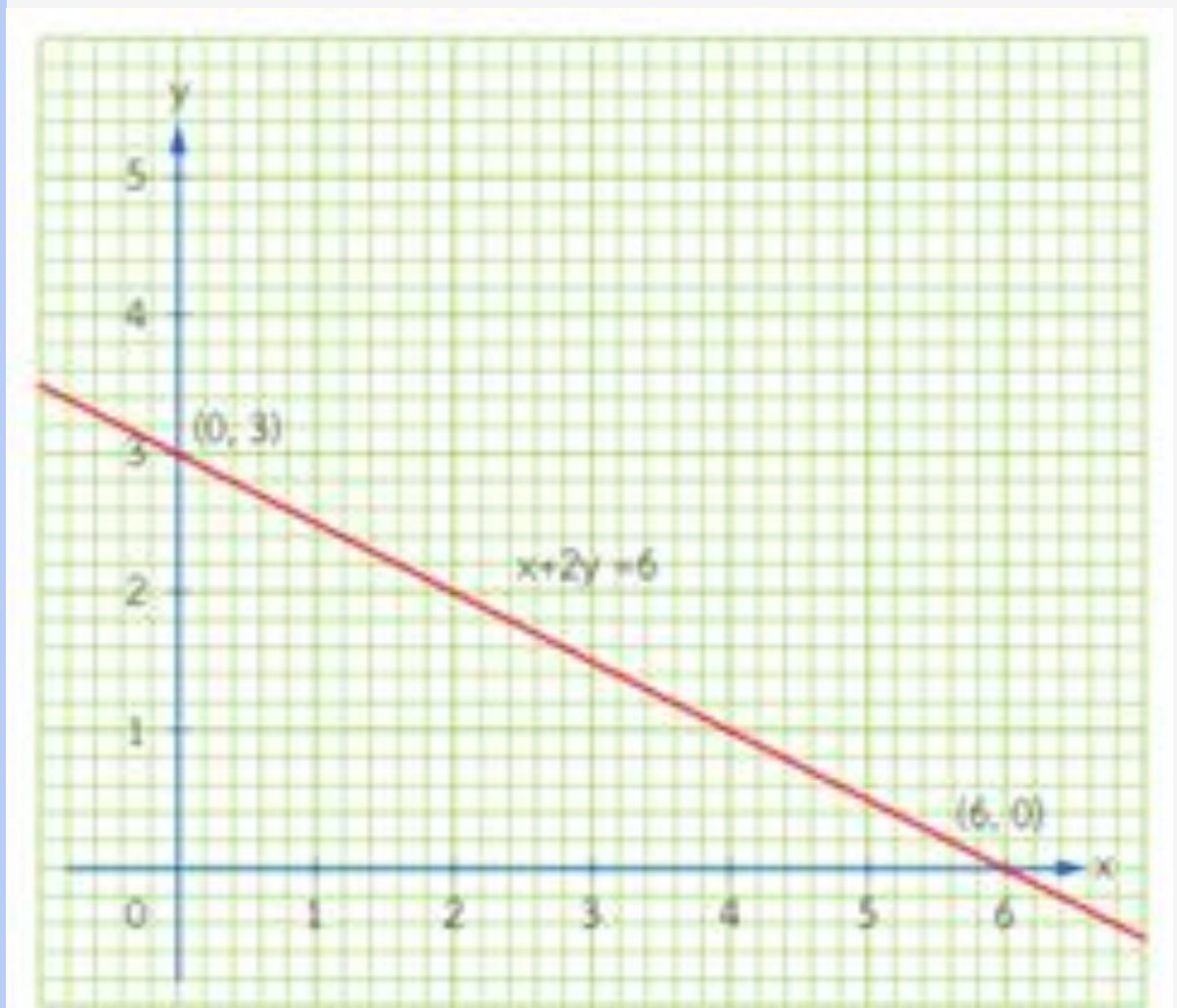
จุดตัดบนแกน X คือ $(6, 0)$

ให้ $x = 0$ แทนในสมการ

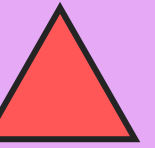
$$0 + 2y = 6$$

$$y = 3$$

จุดตัดบนแกน Y คือ $(0, 3)$



ความหมายของระบบสมการ เชิงเส้นสองตัวแปร



ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ ระบบของสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว และมีจำนวนสมการสองสมการ เขียนในรูป

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{.....} \textcircled{1}$$

$$\text{และ } a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{.....} \textcircled{2}$$

เมื่อ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ เป็นจำนวนจริง โดยที่ a_1, b_1 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ a_2, b_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ ค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการทั้งสองเป็นจริง หรือคู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับทั้งสองสมการ



การแก้ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปรโดยใช้กราฟ

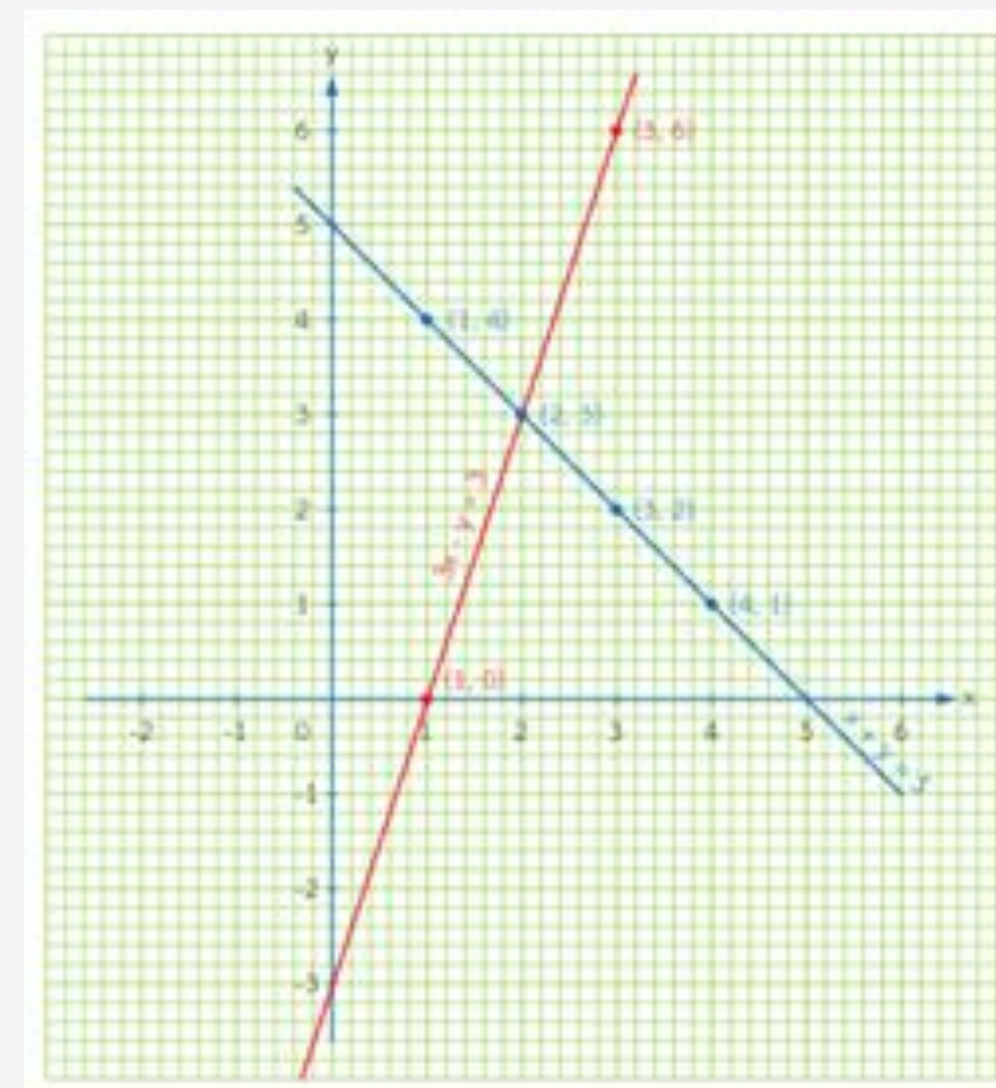


พิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

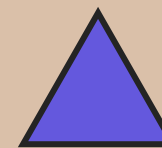
$$x + y = 5 \text{ 1}$$

$$3x - y = 3 \text{ 2}$$

เมื่อนำมาเขียนกราฟบนระนาบเดียวกัน จะมี
ลักษณะดังนี้



การแก้ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปรโดยใช้กราฟ



แต่ละจุดบนกราฟเป็นคำตอบของสมการ ซึ่งพบว่าแต่ละสมการ
มีคำตอบมากมาย เช่น คำตอบของสมการ $x + y = 5$ ได้แก่ $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, ... และคำตอบของสมการ $3x - y = 3$ ได้แก่ $(3, 6)$,
 $(2, 3)$, $(1, 0)$, ... ในบรรดาคำตอบของสมการที่กล่าวนี้ พบว่า $(2, 3)$
เป็นคำตอบของสมการทั้งสอง ซึ่งในกราฟเป็นจุดที่เส้นตรงทั้งสอง
ตัดกัน เรียก $(2, 3)$ ว่าเป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัว
แปร



การแก้ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปรโดยใช้กราฟ

ตัวอย่างที่ ③ จงเขียนกราฟของระบบสมการต่อไปนี้

$$x + 2y = 1 \quad \text{.....①}$$

$$\text{และ} \quad 2x + 4y = 9 \quad \text{.....②}$$

วิธีทำ

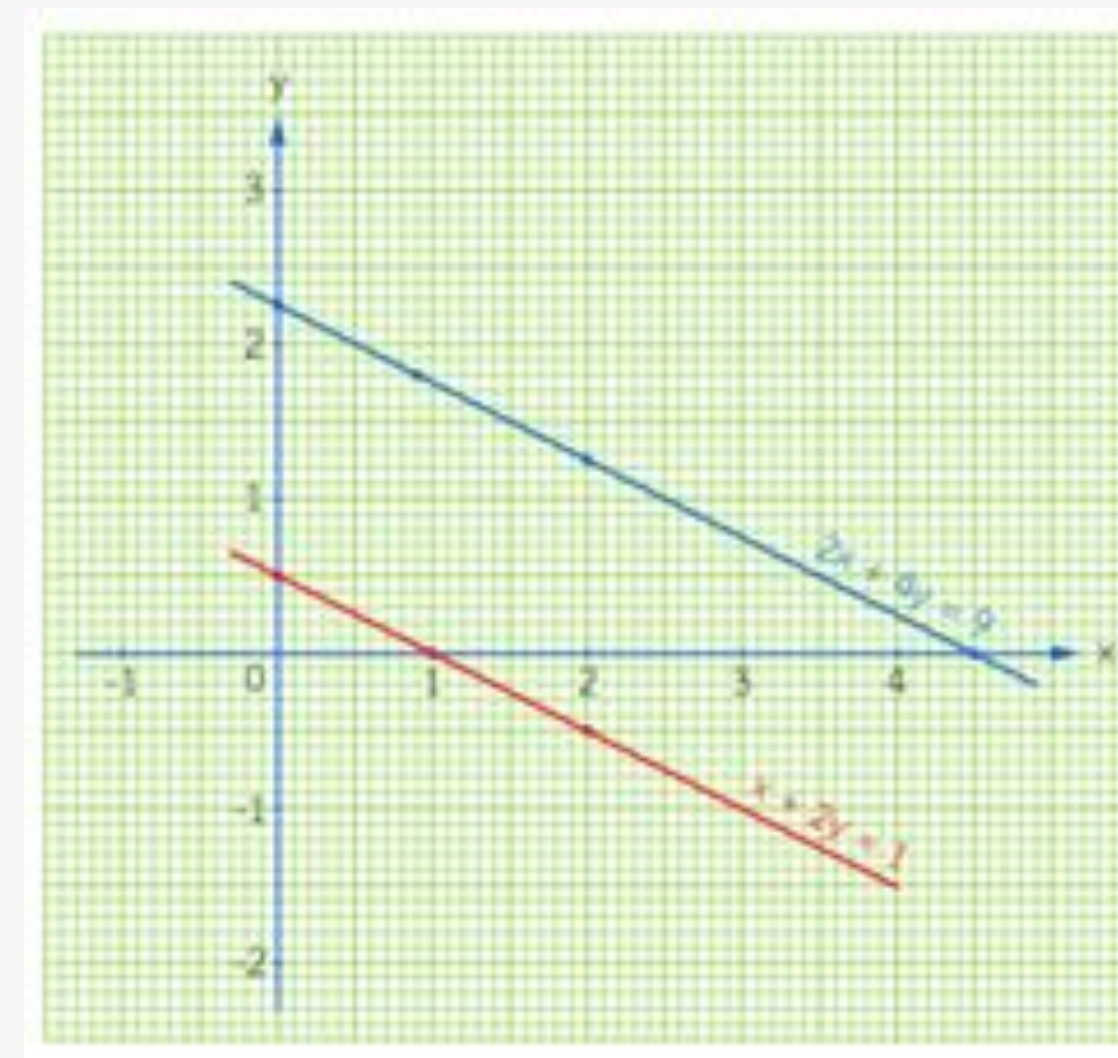
$$x + 2y = 1$$

x	0	1	2
y	0.5	0	-0.5

$$2x + 4y = 9$$

x	0	1	2
y	2.25	1.75	1.25

จะเห็นว่ากราฟของระบบสมการเป็นเส้นตรงที่ขนานกัน
หรือเส้นตรงทั้งสองไม่มีโอกาสตัดกัน นั่นแสดงว่าไม่มีคำตอบ
ของระบบสมการ



การแก้ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปรโดยวิธีการแทนค่า



หลักการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีการแทนค่า

1. จัดรูปตัวแปรในสมการใดสมการหนึ่ง โดยจัดให้ตัวแปร x อยู่ในรูปของตัวแปร y หรือจัดตัวแปร y อยู่ในรูปของตัวแปร x
2. นำตัวแปร x หรือ y ที่จัดรูปแล้วไปแทนค่าในสมการที่เหลือซึ่งจะทำให้สมการนั้นเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
3. แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อ 2
4. นำค่าตัวแปรที่ได้จากการแก้สมการในข้อ 3 ไปแทนค่าในสมการเพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือ
5. ตรวจสอบคำตอบ



การแก้ระบบสมการเชิงเส้น สองตัวแปรโดยวิธีการแทนค่า



ตัวอย่างที่ ๕ จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$x + 5y = 19$$

$$2x - y = 5$$

วิธีทำ

$$x + 5y = 19 \quad \text{.....①}$$

$$2x - y = 5 \quad \text{.....②}$$

จากสมการ ① เขียน x ในรูปของ y

$$\text{จะได้ } x = 19 - 5y \quad \text{.....③}$$

แทนค่า x ในสมการ ②

$$2(19 - 5y) - y = 5$$

$$38 - 10y - y = 5$$

$$-11y = 5 - 38$$

$$-11y = -33$$

$$y = \frac{-33}{-11}$$

$$y = 3$$

แทนค่า $y = 3$ ในสมการ ① ; $x + 5(3) = 19$

$$x = 19 - 15$$

$$x = 4$$



ตรวจสอบคำตอบ

แทนค่า $x = 4$ และ $y = 3$

ในสมการ ①

$$4 + 5(3) = 19$$

$$4 + 15 = 19$$

$$19 = 19$$

หรือแทนค่า $x = 4$ และ $y = 3$

ในสมการ ②

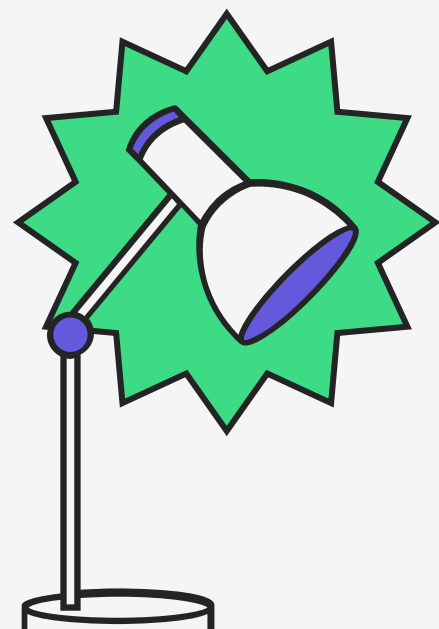
$$2(4) - 3 = 5$$

$$8 - 3 = 5$$

$$5 = 5$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ

คือ $x = 4, y = 3$ หรือ $(4, 3)$



การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีกำจัดตัวแปร



หลักการในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีการกำจัดตัวแปร

- 1) ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งให้เท่ากัน โดยนำจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์คูณตลอดทั้งสองข้างของสมการ
- 2) นำสมการทั้งสองที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งให้เท่ากันแล้วนั้นมาบวกหรือลบกันเพื่อกำจัดให้เหลือตัวแปรเดียวซึ่งจะได้เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
- 3) นำสมการที่ได้ข้อ 2. มาแก้สมการหาค่าตัวแปร
- 4) นำค่าตัวแปรที่ได้จากการแก้สมการในข้อ 3. ไปแทนค่าในสมการเพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือ
- 5) ตรวจสอบคำตอบ



การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีกำจัดตัวแปร



ตัวอย่างที่ 7 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 5x - 2y &= 23 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 && \text{..... ①} \\ 5x - 2y &= 23 && \text{..... ②} \end{aligned}$$

จากสมการที่ ① และ ② สัมประสิทธิ์ของ y มีค่าเท่ากันจึงควรกำจัดตัวแปร y โดยนำสมการ ① + สมการ ②

$$\begin{aligned} (3x + 2y) + (5x - 2y) &= 1 + 23 \\ 8x &= 24 \\ x &= \frac{24}{8} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

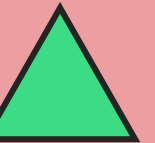
แทนค่า $x = 3$ ในสมการ ①

$$\begin{aligned} 3(3) + 2y &= 1 \\ 9 + 2y &= 1 \\ 2y &= 1 - 9 \\ 2y &= -8 \\ y &= \frac{-8}{2} \\ y &= -4 \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $x = 3, y = -4$ หรือ $(3, -4)$



โจทย์ระบบสมการเชิง เส้นสองตัวแปร

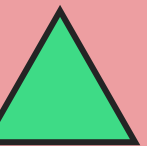


หลักการแก้โจทย์ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1. อ่านโจทย์อย่างรอบคอบ พิจารณาหาสองปริมาณในโจทย์และสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร
2. กำหนดตัวแปรแทนสองปริมาณ (ให้เป็น x และ y)
3. เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปร สองสมการ ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด
4. ดำเนินการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
5. ตรวจสอบคำตอบ



โจทย์ระบบสมการเชิง เส้นสองตัวแปร



ตัวอย่างที่ 10 จำนวนสองจำนวนรวมกันเท่ากับ 73 ผลต่างระหว่างสองเท่าของจำนวนมากกับสามเท่าของจำนวนน้อยเป็น 21 จงหาเลขสองจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ จำนวนมาก แทน x

จำนวนน้อย แทน y

จำนวนสองจำนวนมีผลรวมกัน เท่ากับ 73

$$x + y = 73 \quad \text{..... ①}$$

ผลต่างระหว่างสองเท่าของจำนวนมากกับสามเท่าของจำนวนน้อยเป็น 21

$$2x - 3y = 21 \quad \text{..... ②}$$

นำ 3 คูณสมการ ①

$$3x + 3y = 219 \quad \text{..... ③}$$

สมการ ② + สมการ ③

$$5x = 240$$

$$x = 48$$

แทนค่า $x = 48$ ในสมการ ①

$$48 + y = 73$$

$$y = 25$$

ดังนั้น เลขสองจำนวน คือ 48 และ 25

 **ตรวจสอบคำตอบ**

ถ้าจำนวนสองจำนวน คือ 48 และ 25

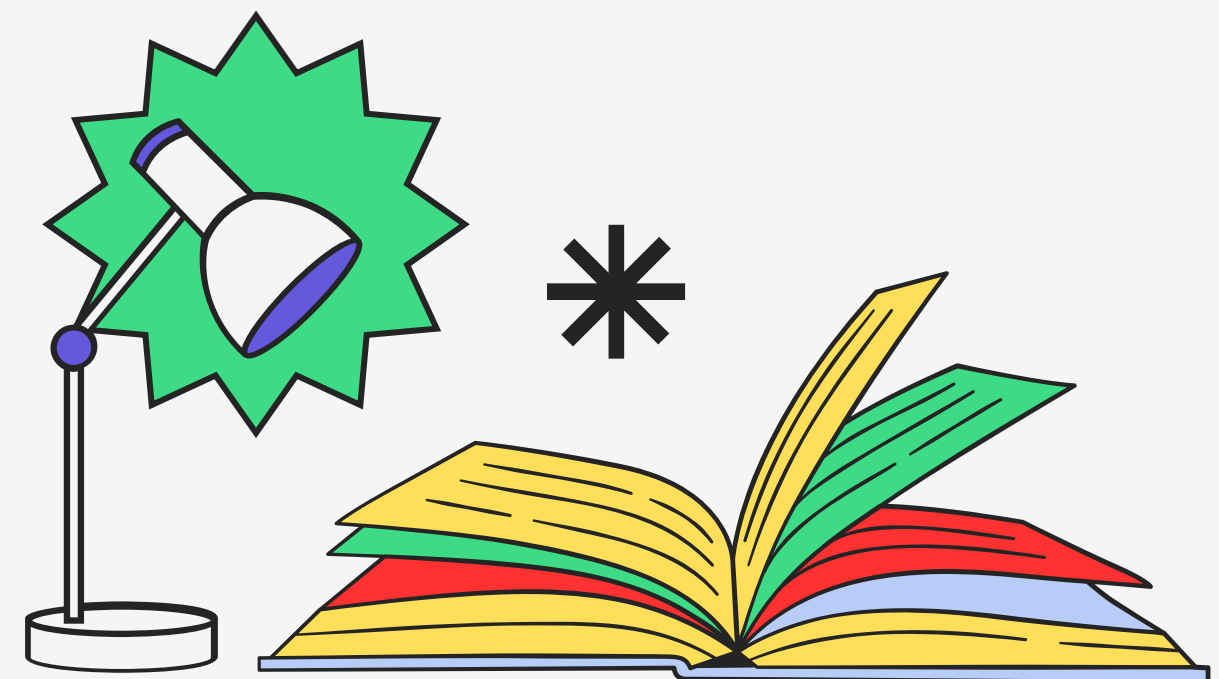
$$48 + 25 = 73$$

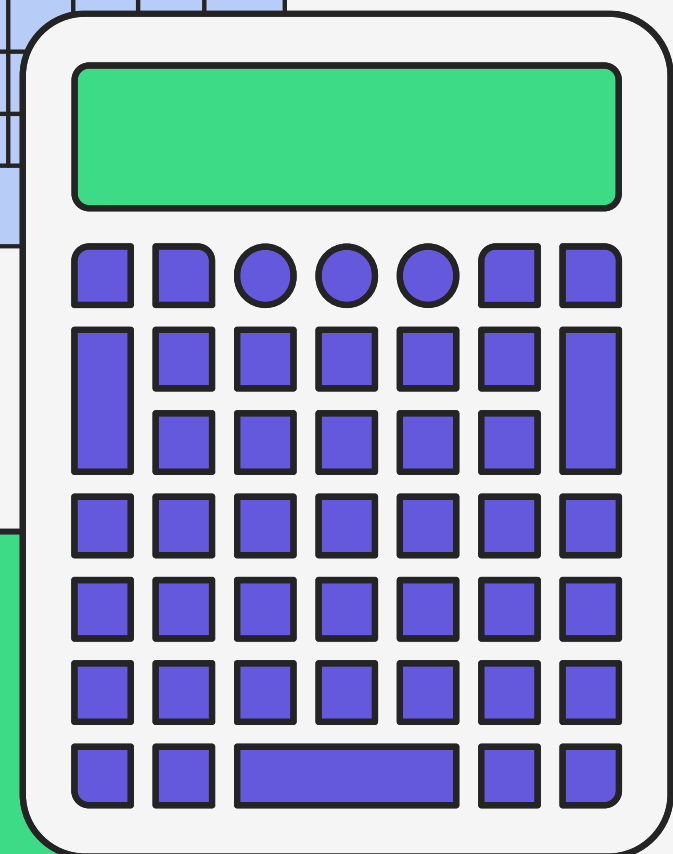
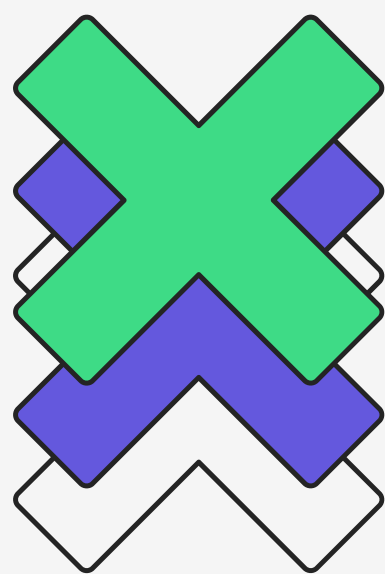
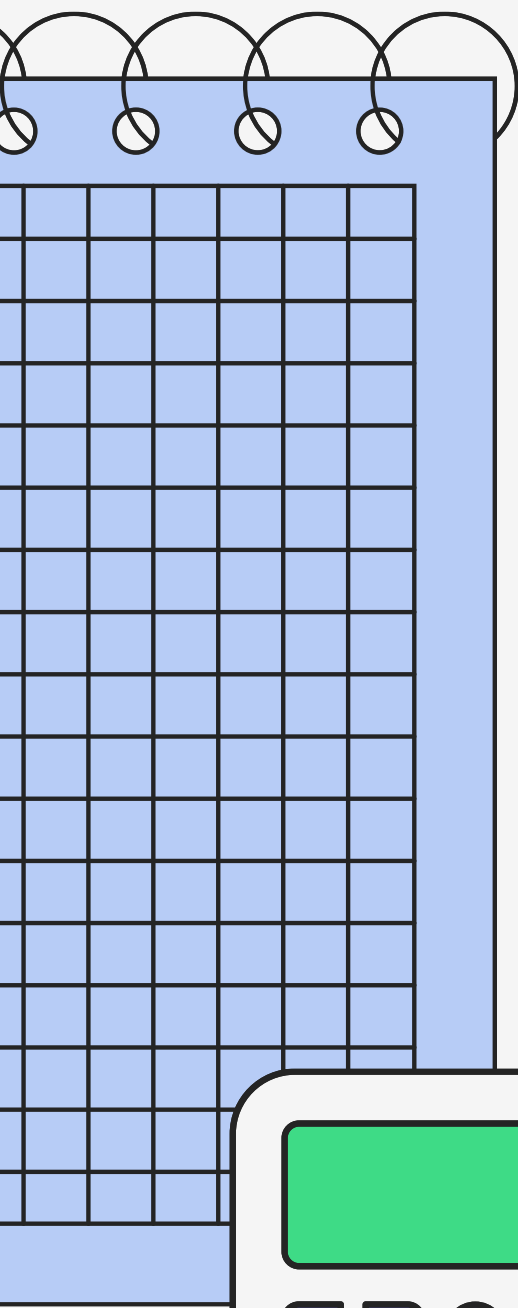
ผลต่างระหว่างสองเท่าของจำนวนมากกับสามเท่าของจำนวนน้อยเป็น 21

$$2(48) - 3(25) = 21$$

$$96 - 75 = 21$$

$$21 = 21$$





สรุป

สรุป

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ สมการที่มีตัวแปรสองตัว เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นหนึ่ง และไม่มีการคูณกันระหว่างตัวแปร รูปทั่วไปของสมการ คือ $ax + by + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวและ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัวและมีจำนวนสมการสองสมการ ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

โดยที่ a_1, b_1 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ a_2, b_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ ค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการทั้งสองเป็นจริง นิยมเขียนคำตอบของสมการอยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y) ซึ่งคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร จะเป็นจุดตัดของกราฟเส้นตรงสองเส้น

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1. วาดกราฟ
2. วิธีการแทนค่า
3. วิธีการกำจัดตัวแปร

