

บทเรียนที่ 4

การแปรผัน



สาระ การเรียนรู้

ความหมายของการแปรรูป

การแปรรูปตรง

การแปรรูปอ้อม

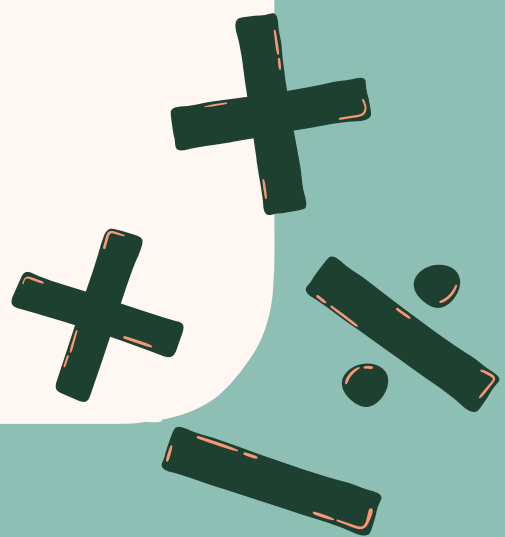
การแปรรูปที่เกี่ยวข้อง

ความหมายของการแปรผัน

ในชีวิตประจำวันและในงานอาชีพจะพบเสมอว่า ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่สองปริมาณขึ้นไป เมื่อปริมาณหนึ่งเปลี่ยนแปลงไปอีกปริมาณหนึ่งก็จะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วยในลักษณะที่ได้สัดส่วนกัน ซึ่งเรียกว่า **“การแปรผัน (Variation)”** และใช้สัญลักษณ์ $\propto$ แทนคำว่า “แปรผัน” ตัวอย่างเช่น ทำไรแปรผันกับจำนวนสินค้า ดอกเบี้ยแปรผันกับเงินต้นและเวลา ปริมาณอาหารแปรผันกับจำนวนคนที่บริโภค และจำนวนปุ๋ยที่ใช้ในไรนาแปรผันกับขนาดของพื้นที่ต่อไร่ เป็นต้น

โดยทั่วไปการแปรผันแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท ดังนี้

1. การแปรผันตรง (Direct variation)
2. การแปรผกผัน (Inverse variation)
3. การแปรผันเกี่ยวเนื่อง (Joint variation)



การแปรผันตรง

การแปรผันตรง (Direct variation) หมายถึง ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่สองปริมาณขึ้นไป โดยที่ปริมาณหนึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น จะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย หรือถ้าปริมาณหนึ่งมีค่าลดลงก็จะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งลดลงตามไปด้วยอัตราส่วนที่คงตัว เช่น

ถ้าเราแปรผันตรงกับยอดขาย ความต้านทานของสายไฟฟ้าแปรผันตรงกับความยาวของสายไฟฟ้า และระยะทางแปรผันตรงกับเวลา เป็นต้น

นิยาม ถ้า x และ y แทนปริมาณใด ๆ และ y แปรผันตรงกับ x แล้ว $y = kx$ หรือ $\frac{y}{x} = k$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน เมื่อ $k \neq 0$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y \propto x$ นั่นคือ $y \propto x$ หรือ $y = kx ; k \neq 0$

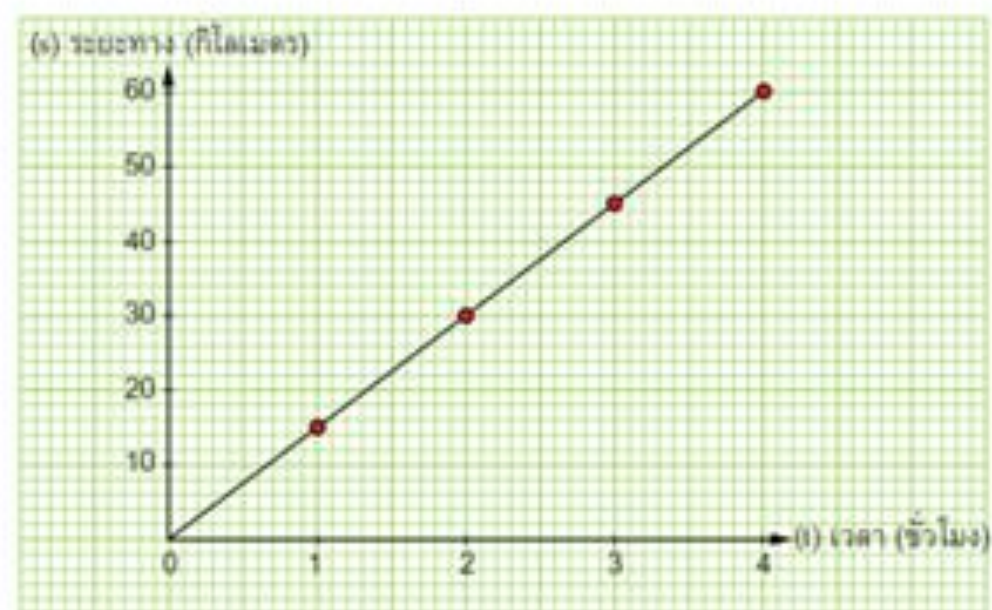


การแปรผันตรง

ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลา

เวลา (t ชั่วโมง)	1	2	3	4
ระยะทาง (s กิโลเมตร)	15	30	45	60
$\frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}} \left(\frac{s}{t} \right)$	$\frac{15}{1}$	$\frac{30}{2}$	$\frac{45}{3}$	$\frac{60}{4}$

กำหนดให้ s แทนระยะทาง และ t แทนเวลา นั่นคือ
 s แปรผันตรงกับ t และสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $s \propto t$ เพราะว่าเมื่อระยะทางเพิ่มขึ้น
จำนวนเวลาก็เพิ่มขึ้นด้วย
จากความสัมพันธ์แสดงเป็นกราฟ ได้ดังนี้



การแปรผันตรง

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาดังกล่าว จะปรากฏเป็นจุดเรียงอยู่ในแนวเส้นตรงหรือเป็นเส้นตรง ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ s แทนระยะทาง และ t แทนเวลา นั่นคือ s แปรผันตรงกับ t จะเขียนแทนได้ด้วย $s \propto t$ เพราะว่าเมื่อระยะทางเพิ่มขึ้น เวลาก็เพิ่มขึ้นด้วย จาก $s \propto t$ จะได้ $s = kt$; k เป็นค่าคงตัวและความสัมพันธ์ดังกล่าวจะเป็นกราฟเส้นตรง

$$\text{จาก} \quad s = kt \text{ หรือ } \frac{s}{t} = k$$

$$\text{แทน } s, t \text{ ได้ว่า } k = \frac{15}{1} = \frac{30}{2} = \frac{45}{3} = \frac{60}{4} = 15$$

$\therefore$ เรียก $k = 15$ ว่าเป็นค่าคงตัวของการแปรผันสามารถเขียนได้

$$s = kt = 15t$$

เช่น $t = 2$ แล้ว $s = 15(2) = 30$ เป็นต้น



การแปรผันตรง

ขั้นตอนการหาค่าตัวแปรในสมการแทนการแปรผัน มีดังนี้

- 1.เขียนสัญลักษณ์ และสมการแทนการแปรผันจากข้อความที่กำหนดให้ (โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน เมื่อ $k \neq 0$)
- 2.หาค่าคงตัวของการแปรผัน (k) โดยการแทนค่าตัวแปรที่กำหนดมาให้ลงในสมการแทนการแปรผันจากข้อ 1
- 3.หาค่าตัวแปรในสมการการแปรผัน



การแปรผันตรง

ตัวอย่างที่ ๓ ถ้า y แปรผันตรงกับ $2x$ และ $y = 3$ เมื่อ $x = 5$ จงหาค่า y เมื่อ $x = 30$

วิธีทำ

เนื่องจาก y แปรผันตรงกับ $2x$ จะได้ $y \propto 2x$

เขียนเป็นสมการ $y = k(2x)$ โดย k เป็นค่าคงตัว และ $k \neq 0$

แทนค่า $x = 5$ และ $y = 3$ ลงในสมการ

จะได้ $3 = k(2)(5)$

$\therefore k = \frac{3}{10}$

นั่นคือ $y = \frac{3}{10}(2x)$

..... ①

หาค่า y โดยแทนค่า $x = 30$ ลงในสมการ ①

จะได้ $y = \frac{3}{10}(2)(30)$

$y = \frac{3}{10}(60)$

ดังนั้น $y = 18$



การแปรผกผัน

การแปรผกผัน (Inverse variation) หมายถึง ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่สองปริมาณขึ้นไปในทิศทางตรงกันข้าม โดยที่ถ้าปริมาณหนึ่งเพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งมีค่าลดลง และถ้าปริมาณหนึ่งมีค่าลดลงก็จะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งเพิ่มขึ้นด้วยอัตราส่วนที่คงตัว
เช่น จำนวนคนกับระยะเวลา เวลากับอัตราเร็ว เป็นต้น

นิยาม ถ้า x และ y แทนปริมาณใดๆ และ y แปรผกผันกับ x แล้ว $y = \frac{k}{x}$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน และ $k \neq 0$ ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y \propto \frac{1}{x}$ นั่นคือ $y \propto \frac{1}{x}$ หรือ $y = \frac{k}{x}$ หรือ $k = xy$; เมื่อ $k \neq 0$



การแปรผกผัน

ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ใช้ในการทำงานกับจำนวนคนงาน

จำนวนคน	1	2	3	4	5	6
เวลา (วัน)	60	30	20	15	12	10
จำนวนคน $\times$ เวลา	1×60	2×30	3×20	4×15	5×12	6×10

กำหนดให้ t แทน เวลาทำงาน และ p แทน จำนวนคน

นั่นคือ t แปรผกผันกับ p และเขียนแทนด้วย $t \propto \frac{1}{p}$ จะได้ว่า เวลาทำงานน้อยลง เมื่อจำนวนคนเพิ่มมากขึ้น

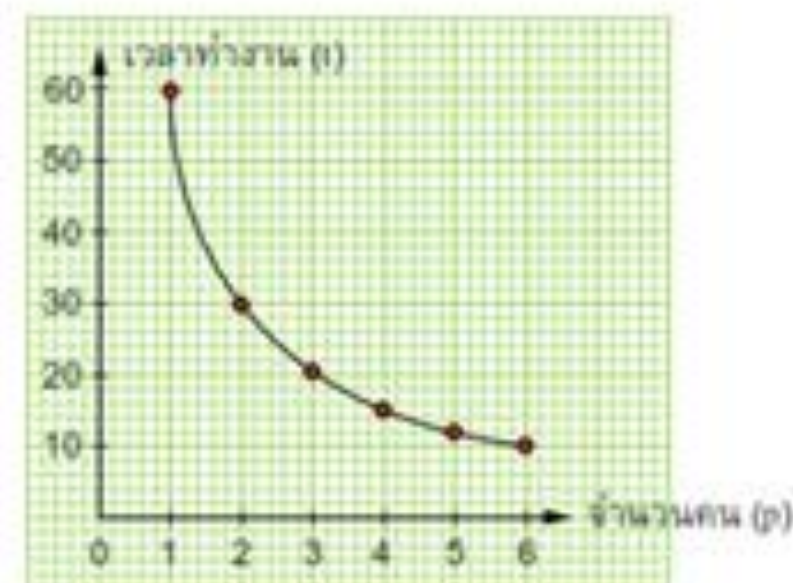
กราฟความสัมพันธ์ของเวลาทำงาน (t) กับจำนวนคน (p)

และจาก $t \propto \frac{1}{p}$ เขียนเป็นสมการได้ $t = \frac{k}{p}$

หรือ $k = tp$ แทนค่าได้ว่า

$$k = 60 \times 1 = 30 \times 2 = 15 \times 4 = 10 \times 6 = 60$$

เรียก k ว่า เป็นค่าคงตัว ของการแปรผัน



การแปรผกผัน

ตัวอย่างที่ 11 กระแสไฟฟ้าแปรผกผันกับความต้านทาน กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านวงจรจำนวน 22 แอมแปร์ มีความต้านทานเท่ากับ 12 โอห์ม ถ้าเปลี่ยนความต้านทานไปเป็น 11 โอห์ม กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านวงจรจะมีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้ I แทน กระแสไฟฟ้า และ R แทน ความต้านทาน

$$I \propto \frac{1}{R} ; \text{ หรือ } I = \frac{k}{R} \text{ โดยที่ } k \text{ เป็นค่าคงตัว และ } k \neq 0$$

$$\text{เมื่อ } I = 22, \quad R = 12$$

$$22 = \frac{k}{12} \quad \text{จะได้ } k = 22 \times 12$$

$$I = \frac{22 \times 12}{R}$$

$$\text{แทนค่า } R = 11 \text{ จะได้ } I = \frac{22 \times 12}{11} = 24$$

ดังนั้น ถ้าความต้านทานเป็น 11 โอห์ม
กระแสไฟฟ้าจะไหลผ่านวงจรเป็น 24 แอมแปร์



การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

การแปรผันเกี่ยวเนื่อง (Joint variation) เป็นความสัมพันธ์ของปริมาณต่าง ๆ ตั้งแต่สามสิ่งขึ้นไป ซึ่งอาจจะสัมพันธ์ในลักษณะการแปรผันตรง หรือแปรผกผันก็ได้ เช่น ดอกเบี้ยจะแปรผันเกี่ยวเนื่องกับเงินต้นและระยะเวลา กำลังไฟฟ้าแปรผันเกี่ยวเนื่องกับปริมาณกระแสไฟฟ้าและแรงเคลื่อนไฟฟ้า เป็นต้น

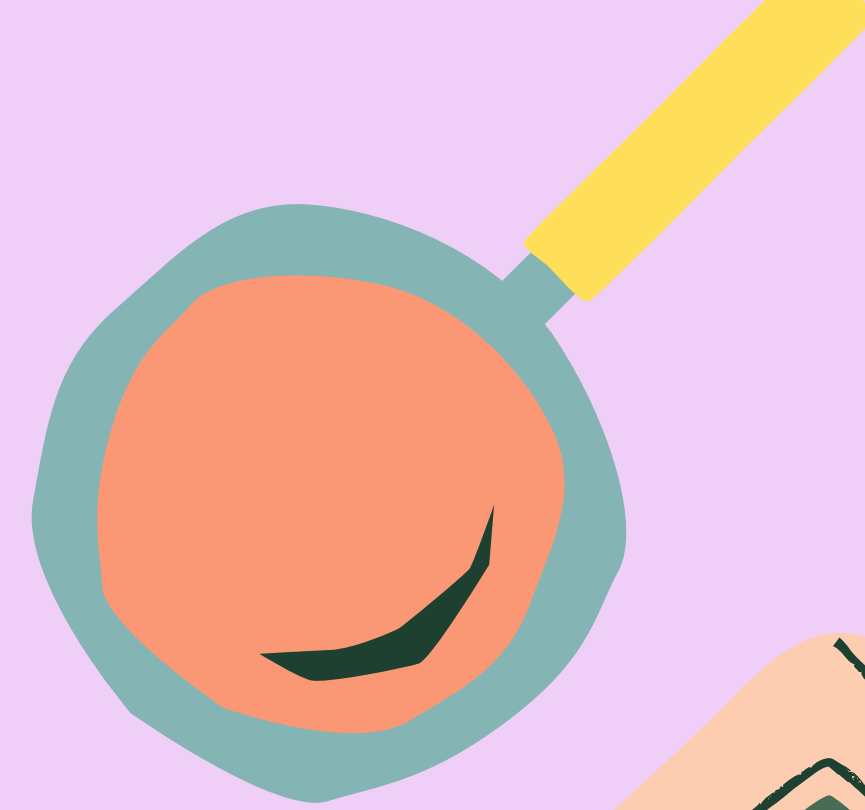
นิยาม ถ้า $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ และ y เป็นปริมาณใด ๆ
 y แปรผันตรงกับ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ หมายถึง $y \propto x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots \cdot x_n$ ซึ่งเรียกว่า
 y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$



การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

ตัวอย่างที่ 12 กำหนด a, b, c และ d แทนปริมาณใดๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์

ข้อความ	เขียนแทนด้วย	เขียนอยู่ในรูปสมการ
1. a แปรผันตรงกับ b และ c	$a \propto bc$	$a = kbc$
2. a แปรผันตรงกับ b และ แปรผกผันกับ c^2	$a \propto \frac{b}{c^2}$	$a = \frac{kb}{c^2}$
3. a แปรผันตรงกับ b, c^3 และแปรผกผันกับ d	$a \propto \frac{bc^3}{d}$	$a = \frac{kbc^3}{d}$



การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

ตัวอย่างที่ 13 จงเขียนสมการแสดงการแปรผันต่อไปนี้

- 1) ระดับความดันของของเหลวชนิดหนึ่ง (P) แปรผันตรงกับความลึกของของเหลว (H) และความหนาแน่นของของเหลว (D)

$$P \propto HD \quad \text{จะได้} \quad P = kHD \quad \text{โดยที่ } k \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

- 2) น้ำหนักที่คานรับได้ (W) แปรผันตรงกับความกว้างของคาน (a) และกำลังสองของความหนาของคาน (b) และแปรผกผันกับความยาวของคาน (c)

$$W \propto \frac{ab^2}{c} \quad \text{จะได้} \quad W = \frac{kab^2}{c} \quad \text{โดยที่ } k \text{ เป็นค่าคงตัว}$$



สรุป

สรุป

1. การแปรผกผัน เป็นความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่สองปริมาณขึ้นไป โดยที่เมื่อปริมาณหนึ่งเปลี่ยนแปลงไปอีกปริมาณหนึ่งก็เปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ในลักษณะที่ได้สัดส่วนกัน และใช้สัญลักษณ์ $\propto$ แทนคำว่า การแปรผกผัน

2. การแปรผันตรง เป็นความสัมพันธ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกัน กล่าวคือ ถ้าปริมาณหนึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย หรือถ้าปริมาณหนึ่งมีค่าลดลงก็จะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งลดลงตามไปด้วยอัตราส่วนที่คงตัว

ถ้า x และ y แทนปริมาณใด ๆ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y \propto x$ หรือ $y = kx$, $k \neq 0$

3. การแปรผกผัน เป็นความสัมพันธ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางตรงข้าม กล่าวคือ ถ้าปริมาณหนึ่งเพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งลดลงด้วยอัตราส่วนที่คงตัว หรือถ้าปริมาณหนึ่งมีค่าลดลงจะมีผลทำให้อีกปริมาณหนึ่งเพิ่มขึ้น ถ้า x และ y แทนปริมาณใด ๆ

สรุป

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y \propto \frac{1}{x}$ หรือ $y = \frac{k}{x}$ หรือ $k = xy, k \neq 0$

4. การแปรผกผันเกี่ยวเนื่อง เป็นความสัมพันธ์ของปริมาณต่าง ๆ ตั้งแต่สามสิ่งขึ้นไป ซึ่งอาจ
จะไปสัมพันธ์ในลักษณะแปรผันตรง หรือแปรผกผันก็ได้

ถ้า $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ และ y เป็นปริมาณใด ๆ y แปรผันตรงกับ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

หมายถึง $y \propto x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots \cdot x_n$ ซึ่งเรียกว่า y แปรผันเกี่ยวเนื่องกับ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$