บทเรียนที่ 1
อัตราส่วน

สาระการเรียนรู้

- ความหมายของอัตราส่วน
- สมบัติของอัตราส่วน
- อัตราส่วนของหลายจำนวน
- การนำอัตราส่วนไปใช้ในงานอาชีพ

ความหมายของอัตราส่วน

เป็นการหาความสัมพันธ์ที่แสดงการเปรียบเทียบปริมาณสองปริมาณ

ถ้า a และ b เป็นปริมาณสองปริมาณ แล้วอัตราส่วน a ต่อ b เขียนแทนด้วย $a : b$ หรือ $\frac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ โดยที่ แทน a ว่าเป็นจำนวนแรกหรือจำนวนที่หนึ่งของอัตราส่วน

b ว่าเป็นจำนวนหลังหรือจำนวนที่สองของอัตราส่วน

อัตราส่วน a ต่อ b จะพิจารณาเฉพาะในกรณีที่ a และ b เป็นจำนวนบวกเท่านั้น เช่น

อัตราส่วน 2 ต่อ 3 เขียนแทนด้วย $2 : 3$ หรือ $\frac{2}{3}$

อัตราส่วน 5 ต่อ 4 เขียนแทนด้วย $5 : 4$ หรือ $\frac{5}{4}$ เป็นต้น

ตำแหน่งของจำนวนในแต่ละอัตราส่วนมีความสำคัญเป็นอย่างมาก กล่าวคือ เมื่อ $a \neq b$ อัตราส่วน $a : b$ ไม่ใช่อัตราส่วนเดียวกันกับอัตราส่วน $b : a$

เช่น อัตราส่วนของจำนวนสินค้าเป็นชิ้นต่อราคาเป็นบาท เป็น $3 : 100$ ไม่ใช่อัตราส่วนเดียวกันกับ $100 : 3$ ทั้งนี้ เพราะอัตราส่วน $3 : 100$ หมายถึง จำนวนสินค้า 3 ชิ้น ราคา 100 บาท ในขณะที่อัตราส่วน $100 : 3$ หมายถึง จำนวนสินค้า 100 ชิ้น ราคา 3 บาท นั่นคือ $3 : 100 \neq 100 : 3$

การเขียนอัตราส่วน

โดยทั่วไปการเขียนอัตราส่วน มี 2 แบบ ดังนี้

1) อัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบปริมาณสองปริมาณที่มีหน่วยเหมือนกัน เมื่อเขียนอยู่ในรูปอัตราส่วนไม่นิยมเขียนหน่วยกำกับไว้

ตัวอย่างที่ 1

จงเขียนอัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. อาจารย์ที่ปรึกษา 1 คน ดูแลนักเรียน 23 คน

ดังนั้น อัตราส่วนของจำนวนอาจารย์ที่ปรึกษาต่อจำนวนนักเรียนเป็น 1 : 23

2. ห้องมีความกว้าง 4.5 เมตร และความยาว 6 เมตร

ดังนั้น อัตราส่วนของความกว้างของห้องต่อความยาวของห้องเป็น 4.5 : 6

การเขียนอัตราส่วน

โดยทั่วไปการเขียนอัตราส่วน มี 2 แบบ ดังนี้

2) อัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบปริมาณสองปริมาณที่มีหน่วยต่างกัน เมื่อเขียนอยู่ในรูปอัตราส่วนต้องเขียนหน่วยกำกับอยู่ด้วยเสมอ

ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนอัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบของแต่ละข้อ
ต่อไปนี้

1. อัตราแลกเปลี่ยนเงิน 35.70 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์

ดังนั้น อัตราส่วนของจำนวนเงินหน่วยเป็นบาทต่อจำนวนเงินหน่วยเป็น
ดอลลาร์เท่ากับ 35.70 บาท : 1 ดอลลาร์

2. เด็กไทยอ่านหนังสือ 5 เล่มต่อปี

ดังนั้น อัตราส่วนของจำนวนหนังสือที่เด็กอ่านต่อเวลาเป็น 5 เล่ม : 1 ปี

กิจกรรมที่ 1.1

ให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบจำนวนสองจำนวน

ข้อ	ข้อความ	เขียนเป็นอัตราส่วน	เขียนในรูปเศษส่วน
	แบมมีเงิน 13 บาท บูมีเงิน 12 บาท	จำนวนเงินของแบมต่อจำนวนเงินของบู เป็น 13 : 12	$\frac{13}{12}$
1	ส้มเขียวหวาน 3 กิโลกรัม ราคา 100 บาท	จำนวนส้มเขียวหวาน (กิโลกรัม) ต่อราคา (บาท) เป็น	.....
2	นมเปรี้ยว 6 กล่อง ราคา 49 บาท	จำนวนนมเปรี้ยว (กล่อง) ต่อราคา (บาท) เป็น	.....

สมบัติของอัตราส่วน

- การทำอัตราส่วนให้เท่ากับอัตราส่วนที่กำหนดให้
- การทำอัตราส่วนให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ
- การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วน

การทำอัตราส่วนให้เท่ากับอัตราส่วนที่กำหนดให้

การทำอัตราส่วนให้เท่ากับอัตราส่วนที่กำหนดให้ สามารถทำได้โดยใช้หลักการดังนี้

1) หลักการคูณ เมื่อคูณแต่ละจำนวนในอัตราส่วนใดด้วยจำนวนเดียวกัน โดยที่จำนวนนั้นมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จะได้อัตราส่วนใหม่ที่มีค่าเท่ากับอัตราส่วนเดิม

นั่นคือ $a : b = ka : kb$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว ซึ่ง b และ k ไม่เท่ากับศูนย์ หรือ $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$

2) หลักการหาร เมื่อหารแต่ละจำนวนในอัตราส่วนใดด้วยจำนวนเดียวกัน โดยที่จำนวนนั้นมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จะได้อัตราส่วนใหม่ที่มีค่าเท่ากับอัตราส่วนเดิม

นั่นคือ $a : b = a \div k : b \div k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวซึ่ง b และ k ไม่เท่ากับศูนย์ หรือ $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ 6 : 12 และ k : 36 เป็นอัตราส่วนเท่ากันแล้ว k มีค่าเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $6 : 12 = k : 36$

นั่นคือ $\frac{6}{12} = \frac{k}{36}$

เนื่องจาก $\frac{6}{12} = \frac{6 \times 3}{12 \times 3} = \frac{18}{36}$

หรือ $6 : 12 = 18 : 36$ ดังนั้น $k = 18$

การทำอัตราส่วนให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ

การทำอัตราส่วนให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ ทำได้โดยการหาจำนวนนับที่มากที่สุด ที่สามารถหารทั้งจำนวนแรกและจำนวนหลังของอัตราส่วนได้ลงตัว

ตัวอย่างที่ 4 จงทำอัตราส่วนต่อไปนี้ให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ

1) 24 : 40 2) 169 : 52

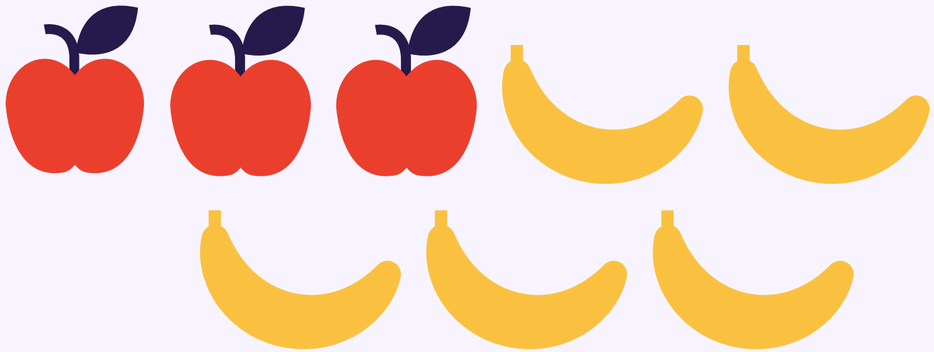
วิธีทำ

1) 24 : 40 หรือ $\frac{24}{40} = \frac{24 \div 8}{40 \div 8} = \frac{3}{5}$

ดังนั้น 24 : 40 = 3 : 5

2) 169 : 52 หรือ $\frac{169}{52} = \frac{169 \div 13}{52 \div 13} = \frac{13}{4}$

ดังนั้น 169 : 52 = 13 : 4



การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วน

การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วน สามารถตรวจสอบได้ ดังนี้

1) การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วนโดยทำเป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ

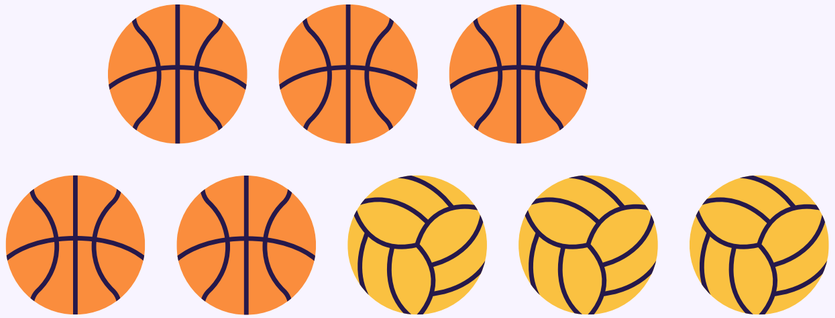
ตัวอย่างที่ 5 จงตรวจสอบว่าอัตราส่วน 3 : 7 กับ 21 : 35 เท่ากันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก 3 : 7 หรือ $\frac{3}{7}$ เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ

และ 21 : 35 หรือ $\frac{21}{35} = \frac{21 \div 7}{35 \div 7} = \frac{3}{5}$

นั่นคือ $\frac{3}{7} \neq \frac{3}{5}$

ดังนั้น $3 : 7 \neq 21 : 35$



การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วน

การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วน สามารถตรวจสอบได้ดังนี้

2) การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วนโดยใช้ผลการคูณไขว้

อัตราส่วน $a : b$ และอัตราส่วน $c : d$ หรือ $\frac{a}{b}$ และ $\frac{c}{d}$ สามารถตรวจสอบการเท่ากันด้วยการคูณไขว้ นั่นคือ $\frac{a}{b} \bowtie \frac{c}{d}$

จากนั้นพิจารณาผลคูณไขว้ $a \times d$ และ $b \times c$ ตามหลักการดังนี้

1. ถ้า $a \times d = b \times c$ แล้ว $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ หรือถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $a \times d = b \times c$
2. ถ้า $a \times d \neq b \times c$ แล้ว $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ หรือถ้า $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ แล้ว $a \times d \neq b \times c$

ตัวอย่างที่ 6 จงตรวจสอบว่าอัตราส่วน 8 : 15 กับ 72 : 135 เท่ากันหรือไม่

วิธีทำ 8 : 15 หรือ $\frac{8}{15}$ กับ 72 : 135 หรือ $\frac{72}{135}$

จากการคูณไขว้ $\frac{8}{15} \bowtie \frac{72}{135}$

จะได้ว่า $8 \times 135 = 1{,}080$

และ $15 \times 72 = 1{,}080$

จะเห็นว่า $8 \times 135 = 15 \times 72$

ดังนั้น $8 : 15 = 72 : 135$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

จงเติมคำตอบให้ถูกต้อง

1 จงทำอัตราส่วนต่อไปนี้ให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ

1.1 32 : 60 = ... 1.2 35 : 75 = ...

1.3 80 : 280 = ... 1.4 144 : 120 = ...

2 จงหาอัตราส่วนที่เท่ากับอัตราส่วนที่กำหนดให้มา 3 อัตราส่วน

2.1 2 : 5 = ...

2.2 4 : 15 = ...

2.3 6 : 8 = ...

2.4 63 : 28 = ...

แบบฝึกหัดที่ 1.1

จงเติมคำตอบให้ถูกต้อง

3 จงจับคู่อัตราส่วนที่เท่ากันโดยเติมตัวอักษรในช่องว่างของแต่ละข้อ

a. 4 : 3 b. 9 : 5 c. 2 : 12 d. 24 : 60 e. 36 : 40 f. 2 : 7 g. 27 : 18

..... 3.1 40 : 15 ..... 3.2 8 : 20

..... 3.3 24 : 18 ..... 3.4 45 : 25

อัตราส่วนของหลายๆ จำนวน

พิจารณาส่วนผสมของขนมชนิดหนึ่ง ประกอบด้วย แป้ง น้ำตาลทราย และน้ำ

อัตราส่วน แป้ง : น้ำตาลทราย เป็น 5 : 3

อัตราส่วน น้ำตาลทราย : น้ำ เป็น 3 : 1

ดังนั้น ส่วนผสมของขนมชนิดนี้ อัตราส่วนของแป้งต่อน้ำตาลทรายต่อน้ำ เท่ากับ 5 : 3 : 1

การเปรียบเทียบปริมาณตั้งแต่สามปริมาณขึ้นไปเรียกว่า อัตราส่วนของจำนวนหลาย ๆ จำนวน หรืออัตราส่วนต่อเนื่อง เขียนแทนด้วย $a : b : c$ เรียก a, b และ c ว่า จำนวนที่หนึ่ง จำนวนที่สอง และจำนวนที่สาม ตามลำดับ ตำแหน่งของจำนวนในอัตราส่วนของจำนวนหลาย ๆ จำนวน มีความสำคัญ เช่นเดียวกับการเขียนอัตราส่วนของสองจำนวน

การเขียนอัตราส่วนของจำนวนมากกว่าสองจำนวน

อัตราส่วนของจำนวนหลาย ๆ จำนวน $a : b : c$ เราสามารถเขียนอัตราส่วนของจำนวนทีละสองจำนวนได้เป็น $a : b$ และ $b : c$ มีหลักการเขียนดังนี้

1) อัตราส่วนสองอัตราส่วน โดยที่จำนวนที่สองของอัตราส่วนแรกเท่ากับจำนวนที่หนึ่งของอัตราส่วนหลัง (หรือ b เท่ากัน) สามารถเขียนอัตราส่วนของจำนวนหลาย ๆ จำนวนได้เลย

ตัวอย่างเช่น $a : b = 4 : \boxed{5}$ และ $b : c = \boxed{5} : 8$

ดังนั้น $a : b : c = 4 : 5 : 8$

2) อัตราส่วนสองอัตราส่วน โดยที่จำนวนที่สองของอัตราส่วนแรกไม่เท่ากับจำนวนที่หนึ่งของอัตราส่วนหลัง (หรือ b ไม่เท่ากัน) จะต้องทำให้จำนวนดังกล่าวเท่ากันก่อน แล้วจึงสามารถเขียนอัตราส่วนของจำนวนหลาย ๆ จำนวนได้

ตัวอย่างเช่น $a : b = 5 : 1$ $b : c = 2 : 3$

โดยที่ทำให้ b เท่ากันก่อนจะได้

$$a : b = 5 \times 2 : 1 \times 2 = 10 : 2$$

$$b : c = 2 : 3$$

ดังนั้น $a : b : c = 10 : 2 : 3$

การเขียนอัตราส่วนของจำนวนมากกว่าสองจำนวน

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $a : b = 4 : 5$ และ $b : c = 5 : 7$ จงเขียนอัตราส่วน $a : b : c$

วิธีทำ จาก $a : b = 4 : \boxed{5}$

$b : c = \boxed{5} : 7$

จากอัตราส่วนทั้งสองมีตัวร่วมเหมือนกัน ซึ่งในที่นี้ คือ 5

ดังนั้น $a : b : c = 4 : 5 : 7$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $a : b = 7 : 4$, $b : c = 2 : 3$ และ $c : d = 1 : 3$ จงเขียนอัตราส่วน $a : b : c : d$

วิธีทำ จาก $a : b = 7 : \boxed{4}$

$b : c = 2 : 3$

$= 2 \times 2 : 3 \times 2$ (ค่า b เป็นตัวร่วม ทำให้เท่ากันคือ เท่ากับ 4)

$= \boxed{4} : 6$

ดังนั้น $a : b : c = 7 : 4 : \boxed{6}$

และ $c : d = 1 : 3$

$= 1 \times 6 : 3 \times 6$ (ค่า c เป็นตัวร่วม ทำให้เท่ากันคือ เท่ากับ 6)

$= \boxed{6} : 18$

ดังนั้น $a : b : c : d = 7 : 4 : 6 : 18$

กิจกรรมที่ 1.2

ให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนต่อไปนี้

1 $a : b = 3 : 2$ และ $b : c = 5 : 4$

จะได้ $a : b = 3 \times 5 : 2 \times 5$

$= \ldots\ldots : \boxed{10}$

และ $b : c = 5 \times 2 : 4 \times 2$

$= \ldots\ldots : 8$

ดังนั้น $a : b : c = \ldots\ldots : \ldots\ldots : \ldots\ldots$

2 $x : y = 2 : 7$ และ $y : z = 4 : 5$

จะได้ $x : y = 2 \times \ldots\ldots : 7 \times 4$

$= 8 : \ldots\ldots$

และ $y : z = 4 \times 7 : 5 \times \ldots\ldots$

$= \boxed{28} : \ldots\ldots$

ดังนั้น $x : y : z = \ldots\ldots : \ldots\ldots : \ldots\ldots$

การนำอัตราส่วนไปใช้ในงานอาชีพ

อัตราส่วนนำไปประยุกต์ใช้ในวิชาชีพและชีวิตประจำวันได้อย่างหลากหลาย ได้แก่ การเขียนแบบแปลนในวงการก่อสร้าง การผสมอาหารสัตว์ การตั้งราคาขาย กำไร ขาดทุน และการคิดค่าจ้างแรงงาน เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 9 ในการเขียนแบบ เมื่อกำหนดอัตราส่วนเป็น 1 : 200 ถ้าขนาดของอาคารชั้นล่างที่ต้องการ กว้าง 30 เมตร ยาว 50 เมตร และสูง 8 เมตร จงหาขนาดของความกว้าง ความยาว ความสูง ที่เขียนลงในแบบจะเป็นเท่าใด

วิธีทำ อัตราส่วนการเขียนแบบเป็น 1 : 200 หมายความว่า ขนาดจริงของอาคารชั้นล่างเป็น 200 เซนติเมตร จะต้องเขียนความยาวลงไปในแบบยาว 1 เซนติเมตร

ถ้าความกว้างของขนาดจริงของอาคารชั้นล่างเป็น 30×100 ซม. = 3,000 ซม. หรือ

อัตราส่วนความกว้างในแบบต่อความกว้างจริง เป็น 1 : 200

$$= 1 \times 15 : 200 \times 15$$

$$= 15 : 3{,}000$$

นั่นคือ จะต้องเขียนความกว้างลงไปในแบบ 15 เซนติเมตร

ถ้าความยาวของขนาดจริงของอาคารชั้นล่างเป็น 50×100 ซม. = 5,000 ซม.

อัตราส่วนความยาวในแบบต่อความยาวจริง เป็น 1 : 200

$$= 1 \times 25 : 200 \times 25$$

$$= 25 : 5{,}000$$

นั่นคือ จะต้องเขียนความยาวลงไปในแบบ 25 เซนติเมตร

ถ้าความสูงของขนาดจริงของอาคารชั้นล่างเป็น 8×100 ซม. = 800 ซม.

อัตราส่วนความสูงในแบบต่อความสูงจริง เป็น 1 : 200

$$= 1 \times 4 : 200 \times 4$$

$$= 4 : 800$$

นั่นคือ จะต้องเขียนความสูงลงไปในแบบ 4 เซนติเมตร

ดังนั้น ขนาดในการเขียนลงไปในแบบ เป็นดังนี้

ความกว้าง 15 เซนติเมตร ความยาว 25 เซนติเมตร และความสูง 4 เซนติเมตร

กิจกรรมที่ 1.3

ให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนต่อไปนี้

1. สนามหญ้าแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวเป็น 7 : 9 ถ้าสนามหญ้ามีความยาว 81 เมตร จงหาความกว้างของสนามหญ้าแห่งนี้

วิธีทำ อัตราส่วนของความกว้างต่อความยาว เป็น 7 : 9 ถ้าความยาวเป็น 81 เมตร

อัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวเป็น 7 × ..... : 9 × ..... = ... : .....
ดังนั้น ความกว้างของสนามหญ้าเท่ากับ .....

สรุป

อัตราส่วน เป็นการหาความสัมพันธ์ที่แสดงการเปรียบเทียบปริมาณสองปริมาณ อัตราส่วน a ต่อ b เขียนแทนด้วย $a : b$ หรือ $\frac{a}{b}$ โดยที่ $b \neq 0$

การเขียนอัตราส่วน มี 2 แบบ คือ เปรียบเทียบปริมาณที่มีหน่วยเหมือนกัน และเปรียบเทียบปริมาณที่มีหน่วยต่างกัน

สมบัติของอัตราส่วน คือ ถ้า k เป็นค่าคงตัว ซึ่ง b และ $k \neq 0$

1) $a : b = ka : kb$ 2) $a : b = \frac{a}{k} : \frac{b}{k}$

การทำอัตราส่วนให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ ทำได้โดยการหาจำนวนนับที่มากที่สุด ที่สามารถหารทั้งจำนวนแรกและจำนวนหลังของอัตราส่วนได้ลงตัว

การตรวจสอบการเท่ากันของอัตราส่วน

1) โดยทำเป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ 2) โดยใช้ผลการคูณไขว้

ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $a \times d = b \times c$

อัตราส่วนของจำนวนหลาย ๆ จำนวนหรืออัตราส่วนต่อเนื่อง เป็นอัตราส่วนที่แสดงการเปรียบเทียบปริมาณตั้งแต่สามปริมาณขึ้นไป