

3

การบิดของเพลา





แรงบิด (Torque)

การบิดที่เกิดขึ้นในเพลากลมส่วนใหญ่ มักจะเกิดขึ้นในลักษณะที่แรงกระทำตั้งฉากกับแนวแกนขณะที่เพลาบิดไปจะทำให้เกิดโมเมนต์บิดขึ้น ถ้าโมเมนต์บิดกระทำกับเพลามากเกินไปจะทำให้เพลาก่อการเสียหายได้

ในการคำนวณหาการบิดของเพลากลม ต้องมีข้อสมมติฐานดังต่อไปนี้

1. เพลาจะต้องตรงและมีหน้าตัดเท่ากันตลอดความยาว
2. ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในเพลจะต้องไม่เกินค่าขีดจำกัดการยืดหยุ่น
3. เพลาจะต้องมีคุณสมบัติในการยืดหยุ่นเหมือนกันตลอดความยาว
4. เส้นรัศมีภาคหน้าตัดตรงของเพลายังคงเป็นเส้นรัศมีตรงหลังจากการบิด
5. หน้าตัดของเพลาก่อนและหลังการบิดจะต้องยังคงเป็นระนาบไม่มีการเปลี่ยนแปลง



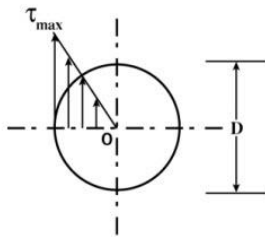
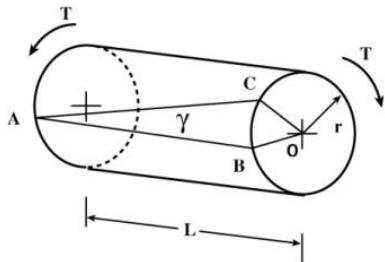


แรงบิด (Torque)

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิด (T) และความเค้นเฉือน (τ)

พิจารณาท่อนเพลลา เมื่อรับแรงบิดแนว AB ก็ะเปลี่ยนไปเป็นแนว AC ให้มุมบิดตามแนวยาว

ระหว่าง AB และ AC เป็นมุม γ และมุมที่จุดศูนย์กลางหน้าตัดของเพลลาเป็นมุม θ ซึ่งจะทำให้เกิดความเครียดเฉือนในเพลลาขึ้น และความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นจะเกิดตรงผิวนอกสุดของเพลลา ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและความเค้นเฉือนสามารถหาได้ ดังสมการต่อไปนี้



หรือ

$$T = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot J$$
$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$





แรงบิด (Torque)

การหาแรงบิดของเพลาค้น (Solid Shafts) และเพลากลวง (Hollow Shafts)

จาก $T = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot J$

เพลาค้น $T = \frac{\tau}{\frac{D}{2}} \times \frac{\pi D^4}{32}$

$$T = \frac{\pi D^3}{16} \times \tau$$

เพลากลวง $T = \frac{\tau}{\frac{D}{2}} \times \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$

$$T = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} \times \tau$$

หมายเหตุ : τ เป็นความเค้นเฉือนสูงสุดของเพลาค้นและเพลากลวง





แรงบิด (Torque)

การหาแรงบิดของเพลาค้น (Solid Shafts) และเพลากลวง (Hollow Shafts)

เมื่อ

T = โมเมนต์บิด (N-m)

J = Polar Moment of Inertia ของเพลาค้น (mm^4)

R = รัศมีของจุดที่ต้องการหาค่า τ (mm, m)

$\tau_{\max}$ = ความเค้นเฉือนสูงสุด (N/mm^2 , MN/m^2)

γ = ความเครียดเฉือน

D = เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกของเพลาค้น (mm, m)

d = เส้นผ่านศูนย์กลางภายในของเพลากลวง (mm, m)





แรงบิด (Torque)

ค่า Polar Moment of Inertia สำหรับเพลาดัน (Solid Shafts) และเพลากลวง (Hollow Shafts)

เพลาดัน (Solid Shafts)	J	$=$	$\frac{\pi}{32} D^4$	$=$	$\frac{\pi}{2} r^4$
เพลากลวง (Hollow Shafts)	J	$=$	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$	$=$	$\frac{\pi}{2} (R^4 - r^4)$





มุมบิด (Angle of Twist)

การพิจารณาหาความแข็งแรงแรงของเพลาสําหรับการออกแบบชิ้นส่วนที่อยู่ภายใต้การบิด สามารถวัดหาความแข็งแรงแรงในการบิดได้โดยวัดที่มุมบิดที่เพลาบิดไป ซึ่งหาได้จากสมการดังนี้

$$\theta = \frac{TL}{JG}$$

เมื่อ θ = มุมบิดของเพล (Radian)

(ในการเปลี่ยนมุมบิดจาก Radian เป็นองศา จะต้องคูณด้วย $\frac{180}{\pi}$ หรือ 57.3)

T = โมเมนต์บิด (N-m)

J = Polar Moment of Inertia (mm⁴)

G = โมดูลัสของความแข็ง (Modulus of Rigidity) (GN/m²)

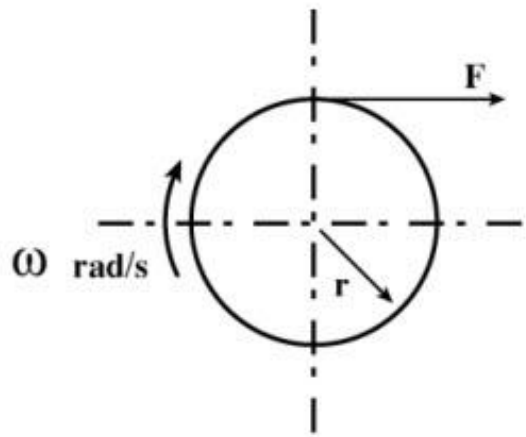
L = ความยาวของเพล (mm)





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

พิจารณาเพลามีขนาดรัศมี (r) หมุนด้วยความเร็ว N รอบต่อวินาที และมีแรงมากระทำให้เพลา หมุน F นิวตัน ดังรูป



เมื่อเพลาหมุนไป 1 รอบ ระยะทางจะเคลื่อนที่ไป $= 2\pi r$

$\therefore$ งานในการหมุนเพลาไป 1 รอบ จะได้ $= \text{แรง} \times \text{ระยะทาง} \text{ (N-m, J)}$
 $= F \times 2\pi r \text{ (N-m, J)}$

เมื่อเพลาหมุน N รอบ ใน 1 วินาที งานที่ได้จากการหมุนเพลา จะได้
 $= F \times 2\pi r \times N \text{ (J/sec, W)}$

$$\text{จะได้} \quad P = 2\pi Fr N$$

$$\text{แต่} \quad T = F \times r$$

$$\therefore \quad P = 2\pi TN$$

$$\text{เมื่อ} \quad 2\pi N = \text{ความเร็วเชิงมุม } (\omega) \text{ เรเดียนต่อวินาที}$$

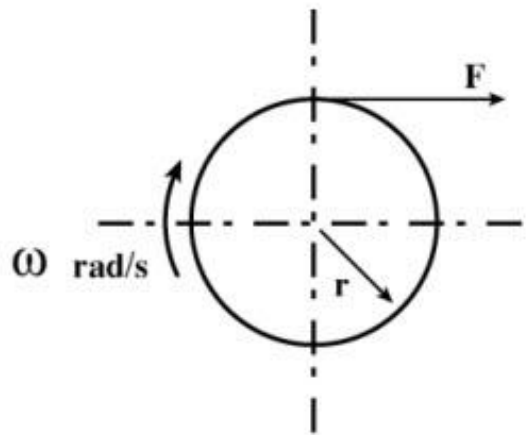
$$P = T \cdot \omega$$





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

พิจารณาเพลามีขนาดรัศมี (r) หมุนด้วยความเร็ว N รอบต่อวินาที และมีแรงมากระทำทำให้เพลามีแรงบิด T นิวตัน ดังรูป



ถ้าให้ เพลาหมุนด้วยความเร็วรอบ n รอบต่อนาที

$$\therefore \text{จะได้} \quad P = \frac{2\pi TN}{60}$$

$$P = T \cdot \omega$$

เมื่อ $P =$ กำลัง (watt)

$$\omega = \text{ความเร็วเชิงมุม (rad/sec)}$$

$$N = \text{ความเร็วรอบของเพลานี้ (rpm)}$$

$$T = \text{แรงบิด (N-m)}$$





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาแรงบิดที่ท ำให้เพลากลมตันยาว 15 เมตร มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 75 มิลลิเมตร บิดไป 2.2 องศา ก ำหนดให้ค่าโมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 95 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

วิธีทำ	จากสูตร	θ	=	$\frac{TL}{JG}$	,	T	=	$\frac{\theta GJ}{L}$
	เมื่อ	T	=	?				
		L	=	15.000	mm			
		θ	=	$2.2 \times \frac{\pi}{180}$	=	0.038	เรเดียน	
		G	=	95,000	N/mm ²			
		J	=	$\frac{\pi}{32}(75^4)$	=	3,106,311.09	mm ⁴	
	แทนค่า	T	=	$\frac{0.038 \times 95,000 \times 3,106,311.09}{15,000}$				
			=	747,585.54	N-mm			
	$\therefore$ แรงบิดที่เกิดขึ้น		=	747.858	N-m			

ตอบ





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหากำลังที่ส่งได้ของเพลากลมตันขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 60 มิลลิเมตร ยาว 2.8 เมตร ในขณะที่หมุนด้วยความเร็วรอบ 150 รอบต่อนาทีเกิดมุมบิด 0.8 องศาโดยให้โมดูลัสของความเฉือนของวัสดุเท่ากับ 115 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

วิธีทำ	จากสูตร	$T = \frac{\theta GJ}{L}$	,	$P = \frac{2\pi TN}{60}$
	เมื่อ	$P = ?$		
		$L = 2,800 \text{ mm}$		
		$N = 150 \text{ rpm}$		
		$\theta = 0.8 \times \frac{\pi}{180}$	$= 0.014$	เรเดียน
		$G = 115,000 \text{ N/mm}^2$		





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหากำลังที่ส่งได้ของเพลากลมตันขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 60 มิลลิเมตร ยาว 2.8 เมตร ในขณะที่หมุนด้วยความเร็วรอบ 150 รอบต่อนาทีที่เกิดมุมบิด 0.8 องศาโดยให้โมดูลัสของความเฉือนของวัสดุเท่ากับ 115 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{32} (60^4) = 1,272,345.025 \text{ mm}^4 \\ \text{แทนค่า } T &= \frac{0.014 \times 115,000 \times 1,237,345.025}{2,800} \end{aligned}$$

$$= 711,473.39 \text{ N-mm}$$

$$\therefore \text{แรงบิดที่เกิดขึ้น} = 711.47 \text{ N-m}$$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } P &= \frac{2\pi TN}{60} \\ &= \frac{2\pi \times 150 \times 711.47}{60} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{กำลังที่ส่งได้} = 11,175.74 \text{ watt}$$

ตอบ





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดและค่ามุมบิดของเพลานหนึ่งซึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 180 มิลลิเมตร ยาว 15 เมตร ส่งกำลังได้ 150 กิโลวัตต์ ที่ความเร็วรอบ 220 รอบต่อนาที โดยให้โมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 95 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

วิธีทำ	จากสูตร	$P = \frac{2\pi TN}{60}$	,	$T = \frac{60P}{2\pi N}$
	เมื่อ	$P = 150,000 \text{ watt}$		
		$N = 220 \text{ rpm}$		
		$D = 180 \text{ mm}$		
		$L = 15,000 \text{ mm}$		
		$G = 95,000 \text{ N/mm}^2$		
		$J = \frac{\pi}{32}(180^4) = 103,059,947 \text{ mm}^4$		





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดและค่ามุมบิดของเพลานี้ซึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 180 มิลลิเมตร ยาว 15 เมตร ส่งกำลังได้ 150 กิโลวัตต์ ที่ความเร็วรอบ 220 รอบต่อนาที โดยให้โมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 95 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

$$\text{แทนค่า } T = \frac{60 \times 150,000}{2\pi \times 220}$$

$$= 6,510.88 \text{ N-m}$$

$$\therefore \text{แรงบิดที่เกิดขึ้น} = 6,510,880 \text{ N-mm}$$

$$\text{จากสูตร } \tau_{\max} = \frac{16T}{\pi D^3}$$

$$= \frac{16 \times 6,510,880}{\pi (180^3)}$$

$$\therefore \text{ความเค้นเฉือนสูงสุด} = 5.69 \text{ N/mm}^2$$

ตอบ





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดและค่ามุมบิดของเพลานหนึ่งซึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 180 มิลลิเมตร ยาว 15 เมตร ส่งกำลังได้ 150 กิโลวัตต์ ที่ความเร็วรอบ 220 รอบต่อนาที โดยให้โมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 95 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

$$\begin{aligned}\text{จากสูตร} \quad \theta &= \frac{TL}{JG} \\ &= \frac{6,510,880 \times 15,000}{95,000 \times 103,059,947} \\ &= 0.01 \text{ เรเดียน} \\ &= 0.01 \times 57.3 \\ \therefore \text{มุมบิดที่เกิดขึ้น} &= 0.573 \text{ องศา}\end{aligned}$$

ตอบ





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลากลมตันและมุมบิดของเพล่า เมื่อเพลายาว 4 เมตร และหมุนด้วยความเร็วรอบ 180 เเรเดียนต่อวินาที ส่งก ำลังได้ 60 กิโลวัตต์ โดยให้ค่าความเค้นเฉือนไม่เกิน 25 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร และค่าโมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 42 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

วิธีทำ	จากสูตร	$P = T \cdot \omega$	,	$T = \frac{P}{\omega}$
	เมื่อ	$P = 60,000 \text{ watt}$		
		$\omega = 180 \text{ rad/sec}$		
		$L = 4,000 \text{ mm}$		
		$\tau = 25 \text{ N/mm}^2$		
		$G = 42,000 \text{ N/mm}^2$		
		$J = \frac{\pi}{32} (40.8^4)$	$=$	$272,044.87 \text{ mm}^4$





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลากลมตันและมุมบิดของเพล เมื่อเพลายาว 4 เมตร และหมุนด้วยความเร็วรอบ 180 เเรเดียนต่อวินาที ส่งก ำลังได้ 60 กิโลวัตต์ โดยให้ค่าความเค้นเฉือนไม่เกิน 25 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร และค่าโมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 42 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

$$\text{แทนค่า } T = \frac{60,000}{180}$$

$$= 333.33 \text{ N-m}$$

$$\therefore \text{แรงบิด} = 333,330 \text{ N-mm}$$

$$\text{จากสูตร } D^3 = \frac{16T}{\pi\tau}$$

$$= \frac{16 \times 333,330}{\pi \times 25}$$

$$D^3 = 67,906.04 \text{ mm}^3$$

$$D = \sqrt[3]{67,906.04}$$

$$\therefore \text{ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง} = 40.80 \text{ mm}$$

ตอบ





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลากลมตันและมุมบิดของเพลา เมื่อเพลายาว 4 เมตร และหมุนด้วยความเร็วรอบ 180 เรเดียนต่อวินาที ส่งกำลังได้ 60 กิโลวัตต์ โดยให้ค่าความเค้นเฉือนไม่เกิน 25 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร และค่าโมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 42 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

$$\begin{aligned}\text{จากสูตร } \theta &= \frac{TL}{JG} \\ &= \frac{333,330 \times 4,000}{272,044.08 \times 42,000} \\ &= 0.117 \text{ เรเดียน} \\ &= 0.117 \times \frac{180}{\pi}\end{aligned}$$

$\therefore$ มุมบิดที่เกิดขึ้น

$$= 6.69 \text{ องศา}$$

ตอบ





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลากลวง ถ้าเพลามีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกเท่ากับ D และขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเท่ากับ $\frac{D}{2}$ เมื่อใช้เพลาส่งกำลัง 150 กิโลวัตต์ ที่ความเร็วรอบ 180 รอบต่อนาที โดยให้ความเค้นเฉือนในเพลากเท่ากับ 75 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร

วิธีทำ	จากสูตร	P	$=$	$\frac{2\pi TN}{60}$	,	T	$=$	$\frac{60P}{2\pi N}$
	เมื่อ	P	$=$	150,000 watt				
		N	$=$	180 rpm				
		τ	$=$	75 N/mm ²				
	แทนค่า	T	$=$	$\frac{60 \times 150,000}{2\pi \times 180}$				
			$=$	7,957.75 N-m				
		$\therefore$ แรงบิดที่เกิดขึ้น	$=$	7,957.50 N-mm				





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลากลวง ถ้าเพลามีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกเท่ากับ D และขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเท่ากับ $\frac{D}{2}$ เมื่อใช้เพลาส่งกำลัง 150 กิโลวัตต์ ที่ความเร็วรอบ 180 รอบต่อนาที โดยให้ความเค้นเฉือนในเพลากเท่ากับ 75 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร

$$\begin{aligned}\text{จากสูตร } T &= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \times \tau \\ 7,957,750 &= \frac{\pi(D^4 - \frac{D^4}{2^4})}{16D} \times 75 \\ \frac{7,957,750 \times 16}{75\pi} &= \frac{(D^4 - \frac{D^4}{16})}{D} \\ 540,379.84 &= \frac{(\frac{16D^4 - D^4}{16})}{D}\end{aligned}$$





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลากลวง ถ้าเพลามีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกเท่ากับ D และขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเท่ากับ $\frac{D}{2}$ เมื่อใช้เพลาส่งกำลัง 150 กิโลวัตต์ ที่ความเร็วรอบ 180 รอบต่อนาที โดยให้ความเค้นเฉือนในเพลากเท่ากับ 75 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร

$$540,379.84 = \frac{\left(\frac{15D^4}{16}\right)}{D}$$

$$540,379.84 = \frac{15D^3}{16}$$

$$\frac{540,379.84 \times 16}{15} = D^3$$

$$576,405.16 = D^3$$

$$\sqrt[3]{576,405.16} = D$$

$$83.22 = D$$

$$\therefore \text{ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก} = 83.22 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$

$$\text{ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน} = \frac{83.22}{2} = 41.61 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหากำลังที่ส่งได้และมุมบิดของเพลากลางรถยนต์ ซึ่งยาว 1.8 เมตร มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 600 มิลลิเมตร ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน 500 มิลลิเมตร โดยที่เพลามุม 120 รอบต่อนาที มีความเค้นเฉือนสูงสุดเท่ากับ 75 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร และค่าโมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 95 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

วิธีทำ	จากสูตร	T	$=$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \times \tau$
	เมื่อ	D	$=$	600 mm
		d	$=$	500 mm
		L	$=$	1,800 mm
		N	$=$	120 rpm
		τ	$=$	75 N/mm ²
		G	$=$	95,000 N/mm ²
		J	$=$	$\frac{\pi}{32} (600^4 - 500^4) = 6,587,527,095 \text{ mm}^4$





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหากำลังที่ส่งได้และมุมบิดของเพลากลารรถยนต์ ซึ่งยาว 1.8 เมตร มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 600 มิลลิเมตร ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน 500 มิลลิเมตร โดยที่เพลามุม 120 รอบต่อนาที มีความเค้นเฉือนสูงสุดเท่ากับ 75 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร และค่าโมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 95 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

$$\begin{aligned}\text{แทนค่า} \quad T &= \frac{\pi(600^4 - 500^4) \times 75}{16 \times 600} \\ &= 1,646,881,774 \text{ N-mm} \\ &= 1,646,881.77 \text{ N-m}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{แรงบิดที่เกิดขึ้น} = 1,646.88 \text{ KN-m}$$

$$\begin{aligned}\text{จากสูตร} \quad P &= \frac{2\pi TN}{60} \\ &= \frac{2\pi \times 120 \times 1,646.88}{60}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{กำลังที่ส่งได้} = 20,965.30 \text{ KW}$$

ตอบ





ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและกำลัง

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหากำลังที่ส่งได้และมุมบิดของเพลากลางรถยนต์ ซึ่งยาว 1.8 เมตร มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 600 มิลลิเมตร ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน 500 มิลลิเมตร โดยที่เพลามุม 120 รอบต่อนาที มีความเค้นเฉือนสูงสุดเท่ากับ 75 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร และค่าโมดูลัสของการเฉือนเท่ากับ 95 จิกะนิวตันต่อตารางเมตร

$$\begin{aligned}\text{จากสูตร} \quad \theta &= \frac{TL}{JG} \\ &= \frac{1,646,881,774 \times 1,800}{6,587,527,095 \times 95,000} \\ &= 0.0047 \text{ เรเดียน} \\ &= 0.0047 \times \frac{180}{\pi}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{มุมบิดที่เกิดขึ้น} = 0.27 \text{ องศา}$$

ตอบ

