

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1
คณิตศาสตร์พื้นฐานช่างไฟฟ้า
และวงจรไฟฟ้า

คณิตศาสตร์พื้นฐานช่างไฟฟ้า

1.1 เลขจำนวนเต็ม (Whole Number)

เลขจำนวนเต็มเป็นจำนวนที่ไม่อยู่ในรูปของเศษส่วน ทศนิยม หรือ เปอร์เซ็นต์ และมีชื่ออื่นที่ใช้เรียกเลขจำนวนเต็มอีกว่า จำนวนเต็ม (Integer Numbers) เขียนได้ 3 รูป คือ



1. จำนวนเต็มบวก (Positive Integer) ประกอบไปด้วยสมาชิก คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6,
2. จำนวนเต็มลบ (Negative Integer) ประกอบด้วยสมาชิก คือ -1, -2, -3, -4, -5
3. ศูนย์ (Zero) ประกอบด้วยสมาชิกตัวเดียว คือ 0

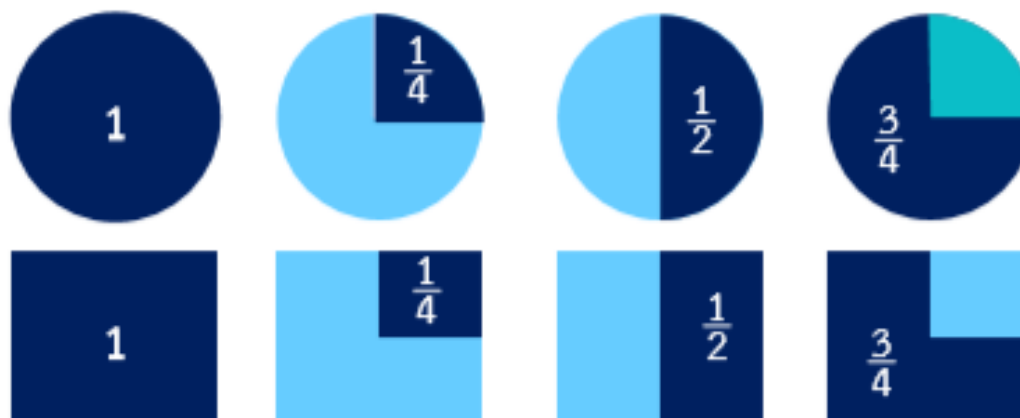
1.2 ทศนิยม (Decimals)

ทศนิยม เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนรูปแบบหนึ่ง ซึ่งเกิดจากการหารจำนวนที่อยู่ในรูปเศษส่วนโดยนำตัวส่วนไปหารตัวเศษแล้วได้ผลลัพธ์ที่ไม่ลงตัว หรือเป็นการบอกปริมาณของสิ่งต่าง ๆ ที่ไม่เต็มหน่วย

วิธีทศนิยมจะใช้ในการแสดงจำนวนอื่นที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม เศษส่วน หรือเปอร์เซ็นต์ เช่น 0.80, 1.25, 1.732, 1.414 และอื่น ๆ การอ่านเช่นเดียวกับจำนวนเต็ม ส่วนที่อยู่หลังจุดจะอ่านทีละตัวเป็นเลขโดดตามตัวเลขที่มี เช่น 1.25 อ่านว่า หนึ่งจุดสองห้า



เศษส่วน เป็นความสัมพันธ์ตามสัดส่วนระหว่างชิ้นส่วนของวัตถุหนึ่งเมื่อเทียบกับวัตถุทั้งหมด เศษส่วนประกอบด้วยตัวเศษ (Numerator) หมายถึง จำนวนชิ้นส่วนของวัตถุที่มี (จำนวนที่อยู่ตัวบน) และตัวส่วน (Denominator) หมายถึง จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดของวัตถุนั้น (จำนวนที่อยู่ตัวล่าง) ถ้าใช้เครื่องคำนวณสำหรับบวก ลบ คูณ หรือหารแล้วจะสามารถถกกลับเศษส่วนไปเป็นทศนิยมหรือจำนวนเต็มได้



เศษส่วนที่แสดงส่วนหนึ่งของจำนวนเต็ม

1.4 เปอร์เซ็นต์ (Percentages)

เปอร์เซ็นต์หรือร้อยละ เป็นวิธีทางคณิตศาสตร์อีกอย่างหนึ่งที่ใช้แสดงค่า โดย 100% หมายถึง ค่าทั้งหมด 50% หมายถึง ค่าเพียงครึ่งเดียวของค่าทั้งหมด และ 25% หมายถึง ค่าหนึ่งในสี่ส่วนของค่าทั้งหมด

เพื่อความสะดวกในการคูณหรือหารด้วยเปอร์เซ็นต์ จะต้องแปลงค่าเปอร์เซ็นต์เป็นจำนวนเต็มหรือทศนิยม จากนั้นใช้ผลลัพธ์นี้สำหรับการคำนวณ เมื่อแปลงค่าเปอร์เซ็นต์เป็นทศนิยมหรือจำนวนเต็มแล้ว ให้ตัดสัญลักษณ์ของเปอร์เซ็นต์ออกและย้ายจุดทศนิยมไปทางซ้าย 2 ตำแหน่ง

เปอร์เซ็นต์	ตัด “%” ออก	ทศนิยม
12.50%	0.125%	0.125
80%	0.80%	0.80
250%	2.50%	2.50

เลื่อนจุดทศนิยมไปทางซ้าย 2 ตำแหน่ง

1.5 ตัวคูณ (Multiplier)

เมื่อจำนวนใดที่ต้องแปลงค่าโดยการคูณด้วยเปอร์เซ็นต์ ให้เรียกเปอร์เซ็นต์นี้ว่า ตัวคูณ โดยในขั้นที่ 1 ให้แปลงค่าเปอร์เซ็นต์เป็นทศนิยม และขั้นที่ 2 คูณจำนวนที่เริ่มด้วยค่าทศนิยม

1.6 เปอร์เซ็นต์เพิ่ม (Percent Increase)

เปอร์เซ็นต์เพิ่ม เป็นเปอร์เซ็นต์ของผลต่างเทียบกับค่าเดิม และใช้ขั้นตอนต่อไปนี้เพื่อเพิ่มจำนวนตามเปอร์เซ็นต์ที่ระบุไว้

ขั้นที่ 1 : แปลงเปอร์เซ็นต์ไปเป็นค่าทศนิยม

ขั้นที่ 2 : บวกหนึ่งกับค่าทศนิยมเพื่อสร้างตัวคูณ

ขั้นที่ 3 : คูณจำนวนที่เริ่มด้วยตัวคูณในขั้นที่ 2



1.7 จำนวนเลขที่กลับกัน (Reciprocals)

จำนวนเลขที่กลับกัน เป็นการแปลงจำนวนเลขให้เป็นเศษส่วนโดยให้เลข 1 เป็นตัวเศษ (ตัวเลขตัวบน) และจำนวนเลขที่จะกลับกันให้เป็นตัวส่วน (ตัวเลขตัวล่าง) นอกจากนี้ยังสามารถที่จะคำนวณจำนวนเลขที่กลับกันของเปอร์เซ็นต์

1.8 จำนวนยกกำลังสอง (Squaring Number)

จำนวนยกกำลังสอง หมายถึง การนำตัวเลขที่ยกกำลังสองไปคูณตัวมันเองซ้ำ 1 ครั้ง เช่น $(10)^2 = 10 \times 10 = 100$ หรือ $(25)^2 = 25 \times 25 = 625$ เป็นต้น

1.8 วงเล็บ (Parentheses)

เมื่อใดก็ตามที่จำนวนเลขอยู่ในวงเล็บ ให้ทำฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ภายในวงเล็บให้เสร็จก่อนจะดำเนินการกับปัญหาที่เหลือต่อไป วงเล็บถูกใช้เพื่อจัดกลุ่มขั้นตอนของการดำเนินการในลำดับให้ถูกต้อง ตัวอย่างเช่น การบวกผลรวมของ 4 กับ 16 กับผลคูณของ 5 กับ 3 ได้เท่ากับ 35

$$(4 + 16) + (5 \times 3) = 20 + 15 = 35$$

1.7 รากที่สอง (Square Root)

ตามที่ทราบมาแล้วว่า รากที่สองของจำนวน a ($\sqrt{a}$) เป็นจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ค่าเท่ากับ a อย่างเช่นรากที่สองของ 36 คือ จำนวนที่ยกกำลังสอง (คูณซ้ำ) โดยตัวมันเองแล้วได้คำตอบเป็น 36 ดังนั้น $36 \sqrt{\quad} = \sqrt{36} \times 6 = 6$ (ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น $6^2 = 36$ หรือ $-6^2 = 36$) เนื่องจากอาจเป็นการยากที่จะทำด้วยตนเอง เพียงใช้คีย์สแควร์รูลของเครื่องคำนวณจะทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่า เช่น $2 \approx \sqrt{1.414}$, $3 \sqrt{\quad} \approx 1.732$ และ $\sqrt{1000} \approx 31.62$ เป็นต้น

เพื่อป้องกันความสับสนในภาษาไทย คำว่า ราก มีความหมายในเชิงผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ ส่วนเครื่องหมาย กรณฑ์ ใช้เพื่อเรียกเครื่องหมาย square root หรือ



1.11 ปริมาตร (Volume)

ปริมาตร เป็นปริมาณของรูปทรงสามมิติ ซึ่งยึดถือหรือบรรจุอยู่ในภาชนะไม่ว่าจะสถานะใด ๆ ก็ตาม หาค่าได้โดยการคูณ ความยาว $\times$ ความกว้าง $\times$ ความสูง ของรูปทรงนั้น มีหน่วยวัดปริมาตรมาตรฐานคือ ลูกบาศก์เซนติเมตร (ลบ.ซม. หรือ ซม.³ หรือ cm³) และลูกบาศก์เมตร (ลบ.ม. หรือ ม.³ หรือ m³) หรือหน่วยวัดปริมาตรอื่น ๆ ที่มีหลากหลายที่นิยมเช่นกัน เช่น ลูกบาศก์นิ้ว ลูกบาศก์ฟุต และแกลลอน เป็นต้น

1.12 กิโล (Kilo)

ตัวอักษร k ตัวพิมพ์เล็ก เป็นค่าอุปสรรคใช้เติมหน้าหน่วยในระบบเมตริก มีค่าเท่ากับ 1,000 เมื่อแปลงจ านวนที่มี k ในหน่วยวัด อย่างเช่น 22 kV ถ้ากลับไปเป็นหน่วยฐานได้ $22 \times 1,000 = 22,000 \text{ V}$ ซึ่งอักษร k นี้ใช้มากในอาชีพช่างไฟฟ้า เช่น k Ω (กิโลโอห์ม) kW (กิโลวัตต์) kA (กิโลแอมแปร์) และ kV (กิโลโวลต์) เป็นต้น ถ้าต้องการกลับหน่วยฐานให้เป็นหน่วยวัดที่มีค่า k อยู่ ให้ค่าจ านวนนั้นหาร ด้วย 1,000 และเพิ่ม k เป็นค าวอุปสรรค อย่างเช่น $22,000 \text{ V} = \frac{22,000}{1,000} = 22\text{kV}$

1.11 การปัดเศษ (Rounding Off)

การปัดเศษไม่มีกฎเป็นการเฉพาะ แต่การปัดเศษไปเป็นสองหรือสามเลขนัยสำคัญ ก็ควรจะเพียงพอสำหรับการคำนวณทางไฟฟ้า การเลือกหลักตัวเลขที่จะพิจารณาปัดเศษ โดยตัวเลขถัดไป (ทางขวา) ถ้าเท่ากับหรือมากกว่า 5 ให้เพิ่มค่าตัวเลขที่เลือกขึ้นไป 1 (ปัดขึ้น) หรือตัวเลขถัดไปถ้า น้อยกว่า 5 ให้คงตัวเลขนั้นไว้ (ปัดลงหรือปัดทิ้ง) เช่น

0.1245 ปัดเศษทศนิยมตำแหน่งที่สามขึ้นเพราะตัวเลขถัดไปเท่ากับห้า = 0.125 ปัดขึ้น

1.674 ปัดเศษทศนิยมตำแหน่งที่สองคงตัวเพราะตัวเลขถัดไปเท่ากับสี่ = 1.67 ปัดลง

21.99 ปัดเศษทศนิยมตำแหน่งที่หนึ่งขึ้นเพราะตัวเลขถัดไปเท่ากับเก้า = 22 ปัดขึ้น

367.20 ปัดเศษทศนิยมตำแหน่งที่หนึ่งทิ้งเพราะตัวเลขถัดไปเท่ากับศูนย์ = 367 ปัดลง

วงจรไฟฟ้าและสูตรพื้นฐาน

2.1 วงจรไฟฟ้า (Electrical Circuit)

วงจรไฟฟ้าพื้นฐานประกอบด้วย แหล่งกำเนิดกำลังตัวนำ (Conductor) และโหลด (Load) หรือภาระทางไฟฟ้า ส่วนสวิตช์ใช้ต่ออนุกรมกับตัวนำวงจรเพื่อควบคุมการทำงานของโหลดไฟฟ้าแสงสว่าง (เปิดหรือปิด)

2.2 แหล่งกำเนิดกำลัง (Power Source)

แหล่งกำเนิดกำลัง มี 2 ประเภท คือ ไฟฟ้ากระแสตรงและไฟฟ้ากระแสสลับ

1 ไฟฟ้ากระแสตรง (Direct Current: DC)

2 ไฟฟ้ากระแสสลับ (Alternating Current: AC)

2.3 ความนำไฟฟ้า (Conductance)

ความนำหรือสภาพนำ (Conductivity) เป็นคุณสมบัติของโลหะที่ยอมให้กระแสไหลผ่านตัวนำ (Conductor) ที่ดีที่สุดตามลำดับสภาพนำ คือ เงิน ทองแดง ทองคำ และ อะลูมิเนียม ซึ่งทองแดงถูกประยุกต์ใช้ในทางไฟฟ้ามากที่สุด

2.4 ความต้านทานวงจร (Circuit Resistance)

ความต้านทานรวมทั้งหมดของวงจรประกอบด้วย ความต้านทานของแหล่งกำเนิดกำลัง ความต้านทานของสายไฟฟ้า และความต้านทานของโหลดเครื่องใช้ไฟฟ้าอย่างเช่น เครื่องทำความร้อน เครื่องปิ้งขนมปัง จะมีความต้านทานของตัวนำสูงจนเกิดความร้อนมากมายสำหรับเครื่องใช้ไฟฟ้านั้น



2.5 กฎของโอห์ม (Ohm's Law)

กฎของโอห์ม ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณกระแส (I) แรงดันไฟฟ้า (E) และความต้านทานของวงจรไฟฟ้ากระแสตรง เขียนเป็นสูตรได้คือ $I = \frac{E}{R}$

2.6 กฎของโอห์มและไฟฟ้ากระแสสลับ (Ohm's Law and Alternating Current)

1

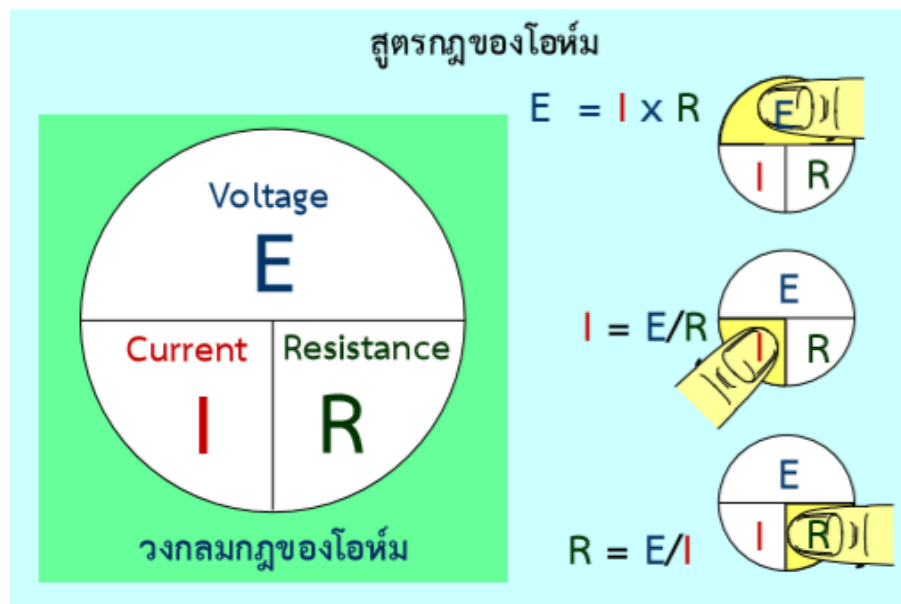
ในวงจรไฟฟ้ากระแสตรง ปริมาณกระแสที่ไหลจะถูกต้านทานโดยความต้านทานทางกายภาพของวัสดุที่กระแสไหลผ่าน การต้านการไหลของกระแสนี้เรียกว่า ความต้านทาน มีหน่วยวัดเป็น โอห์ม

2

ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ มี 3 ปัจจัยที่ต้านการไหลของกระแสไฟฟ้า คือ 1) ความต้านทานของวัสดุในวงจร 2) อินдукติฟ รีแอกแตนซ์ของวงจร (X_L) และ 3) คาปาซิติฟ รีแอกแตนซ์ของวงจร (X_C)

2.7 วงกลมสูตรกฎของโอห์ม (Ohm's Law Formula Circle)

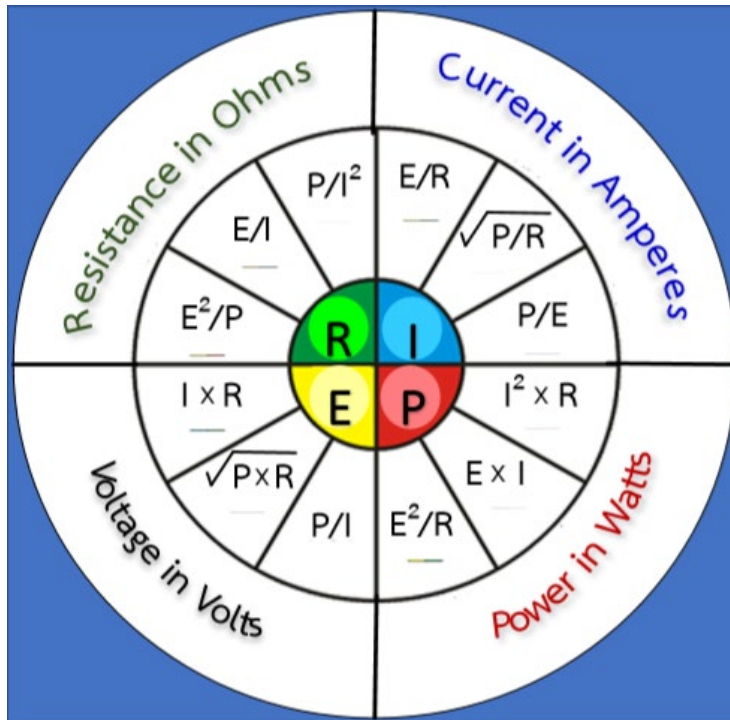
กฎของโอห์มเป็นความสัมพันธ์ระหว่างกระแส แรงดัน และความต้านทาน เขียนอยู่ในสูตร $I = \frac{E}{R}$ และสามารถย้ายข้างได้อีก 2 สูตร คือ $E = I \times R$ และ $R = \frac{E}{I}$ ในการใช้สูตรทั้งสามนี้จะต้องทราบค่าสองค่าถึงสามารถหาค่าตามสูตรได้



ปัดค่าที่ต้องการทราบ เหลือ 2 ตัวแปร
จะนำไปใช้เป็นสูตร

2.8

กงล้อสูตรและการใช้สูตร (Formula Wheel and Using)

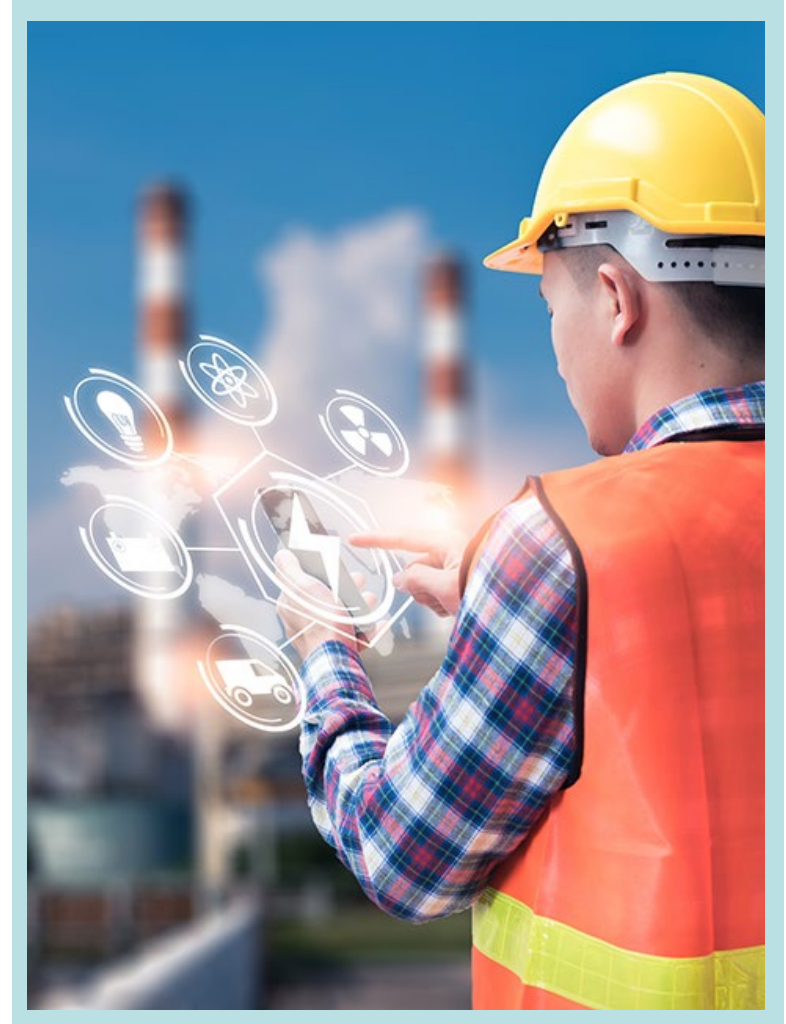


การใช้กงล้อสูตรนี้แบ่งออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนจะมี 3 สูตร เมื่อนำไปใช้กับงานจริงสามารถใช้เครื่องคำนวณหาคำตอบได้โดยตรงโดยมีขั้นตอนดังนี้

- ขั้นที่ 1: ต้องทราบว่า ค่าถามนั้นถามถึง I, E, R หรือ P
- ขั้นที่ 2: ทราบค่าอะไรเกี่ยวกับ I, E, R หรือ P
- ขั้นที่ 3: เลือกใช้สูตรอะไร
- ขั้นที่ 4: ดำเนินงานคำนวณหาคำตอบ

2.9 กำลังไฟฟ้าสูญเสียของตัวนำ (Power Losses of Conductors)

กำลังไฟฟ้าในวงจรอาจเป็น “ประโยชน์” หรือ “สูญเสียเปล่า” ก็ได้ กำลังไฟฟ้าส่วนใหญ่ที่ใช้โดยโหลด เช่น คอมพิวเตอร์ออเรสเซนต์มอเตอร์ หรือองค์ประกอบของเตาไฟฟ้าจะถูกใช้ในงานที่เป็นประโยชน์ ความร้อนที่เกิดขึ้นในตัวนำ หม้อแปลง และขดลวดมอเตอร์จะเป็นงานที่สูญเสียเปล่า งานที่สูญเสียเปล่าเหล่านี้ยังคงใช้พลังงาน ดังนั้นจึงต้องเสียค่าใช้จ่ายค่าพลังงานดังกล่าว เราจึงเรียกงานที่สูญเสียเปล่านี้ว่า “กำลังไฟฟ้าสูญเสีย”



หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

เวกเตอร์

ความหมายของเวกเตอร์

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector Quantity) คือ ปริมาณที่ต้องการบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะได้ความหมายที่สมบูรณ์ เช่น ความเร็ว ความเร่ง การกระจัด โมเมนตัม และแรง เป็นต้น



ความเร็วต้องบอกทั้ง
ขนาดและทิศทาง



แรงต้องบอกทั้ง
ขนาดและทิศทาง



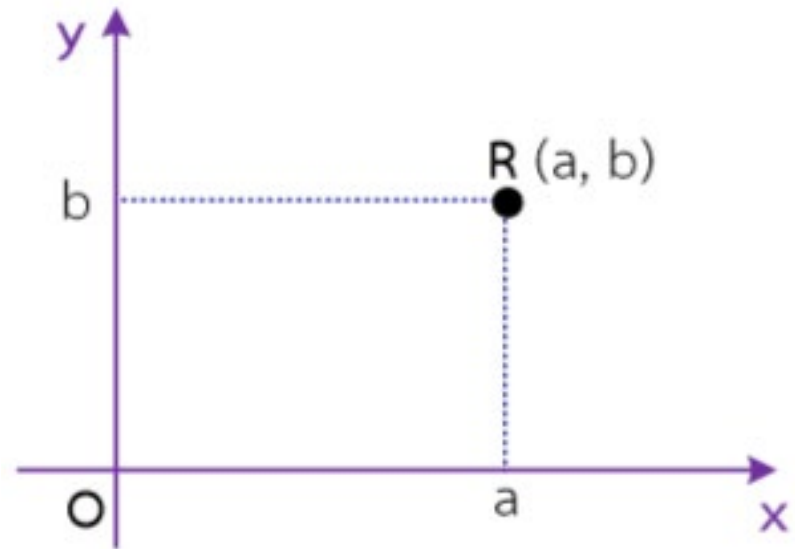
สนามแม่เหล็กไฟฟ้าต้อง
บอกทั้งขนาดและทิศทาง



ความเร่งต้องบอกทั้งขนาดและทิศทาง

เวกเตอร์ในระนาบ

นิยาม : ให้เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันที่จุด O เรียกจุด O ว่า จุดกำเนิด เรียกเส้นในแนวนอนว่า แกน x เรียกเส้นในแนวแกนตั้งว่า แกน y เรียกแกนทั้งสองว่า แกนพิกัดฉาก แต่ละแกนเป็นเส้นจำนวน พิกัดของจุดกำเนิดคือ $(0, 0)$ และเรียกระนาบดังกล่าวว่า ระนาบพิกัดฉาก หรือระนาบ xy แทนจุดแต่ละจุดด้วยคู่อันดับ (a, b) จุด R เป็นจุดที่แทนด้วยคู่อันดับ (a, b) ซึ่งเป็นพิกัดของจุด R

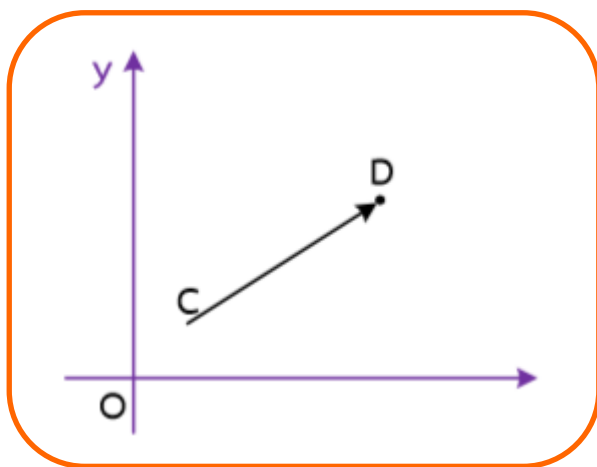
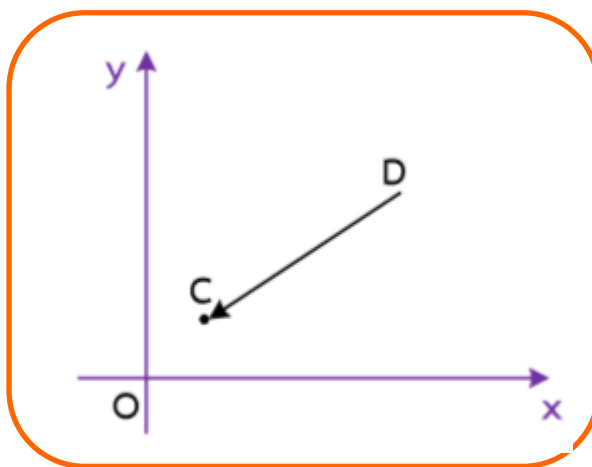


ระนาบพิกัดฉาก

2.1

เวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต

นิยาม : ให้ C และ D เป็นจุดสองจุดในระนาบพิกัดฉาก เมื่อแทนส่วนของเส้นตรงมีทิศทางออกจากจุด C ไปยังจุด D ด้วย $\overrightarrow{CD}$ ดังรูป ก) เรียก $\overrightarrow{CD}$ ว่า เวกเตอร์ เรียก C ว่า จุดเริ่มต้น เรียก D ว่า จุดปลายของเวกเตอร์ ใช้สัญลักษณ์ แทนความยาวของส่วนเส้นตรงระหว่าง C และ D ส่วนหัวลูกศรบอกทิศทาง ดังนั้น เวกเตอร์จึงมี 2 ส่วน คือ ขนาด (Magnitude หรือ Length) และทิศทาง (Direction)

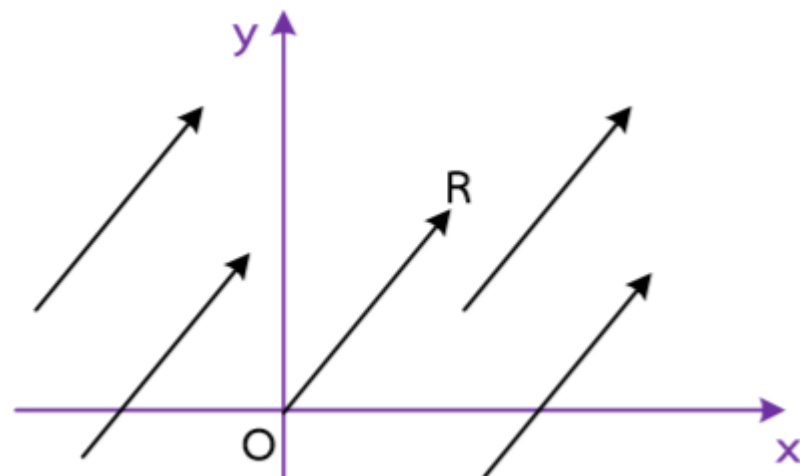
เวกเตอร์ $\overrightarrow{CD}$ เวกเตอร์ $\overrightarrow{DC}$

เวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต

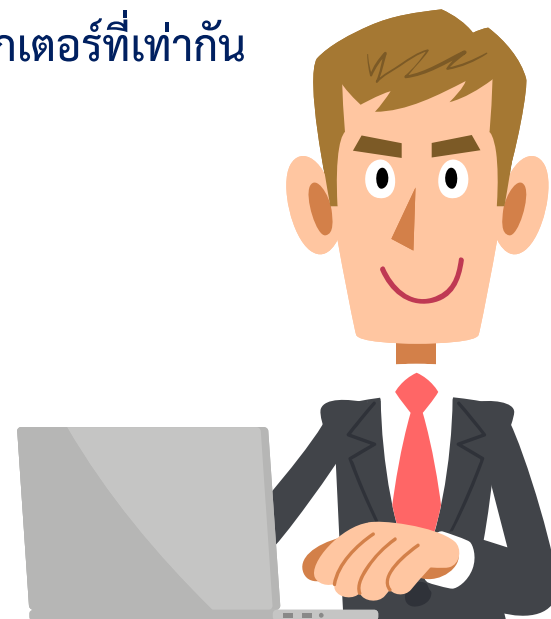
2.2

การเท่ากันของเวกเตอร์

เวกเตอร์ที่เท่ากัน คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเหมือนกัน ไม่ว่าจะอยู่ในตำแหน่งใดในระนาบพิกัดฉาก หรือจะมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดหรือไม่ก็ตาม ดังรูปเป็นตัวอย่างเวกเตอร์ที่เท่ากัน ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางอยู่ในตำแหน่งมาตรฐานคือ มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{OR}$ จึงเรียกเวกเตอร์ที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานนี้ว่า เวกเตอร์ตำแหน่ง (Position Vector) ส่วนรูปที่ 2.4 เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากัน เนื่องจากมีทิศทางตรงกันข้ามถึงแม้ว่าจะมีขนาดเท่ากันก็ตาม



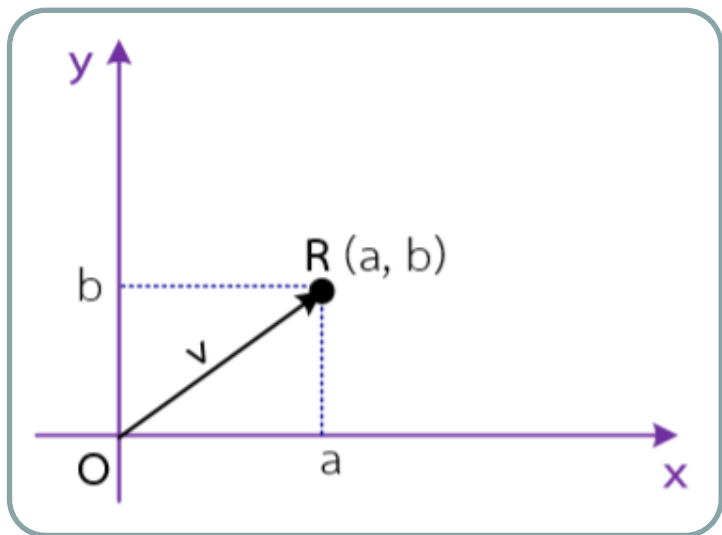
เวกเตอร์ที่เท่ากัน



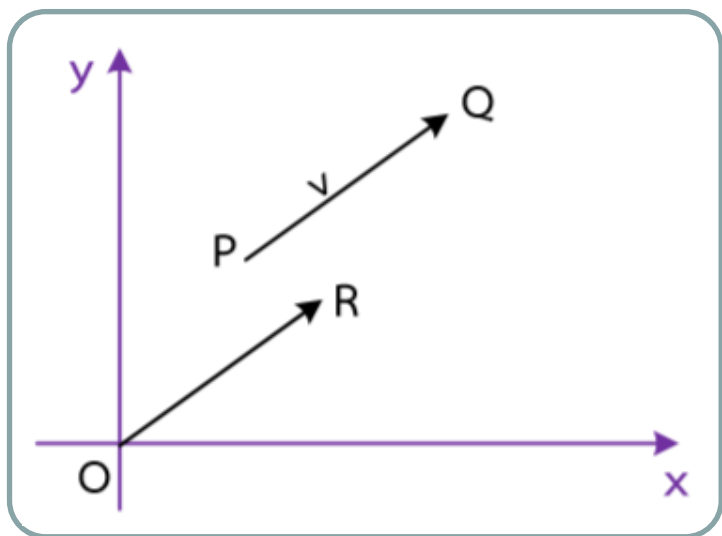
2.3

เวกเตอร์ในเชิงพีชคณิต

ในรูป ก. แทนเวกเตอร์ v ด้วยคู่อันดับ (a, b) ของจำนวนจริง a และ b เป็นพิกัดของจุดปลาย R ในกรณีที่ไม่ต้องการระบุจุดเริ่มต้นและจุดปลายของเวกเตอร์ ดังรูป ข. เวกเตอร์ v เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ตำแหน่ง ถ้าเลื่อน PQ ไปอยู่ที่จุดกำเนิด O และจุดปลายอยู่ที่ R ก็จะได้ OR มีขนาดและทิศทางเดียวกับ PQ และจุด R มีพิกัด (a, b) แล้วจะแทนเวกเตอร์ v ในเชิงพีชคณิตด้วยคู่อันดับ (a, b) เมื่อ (a, b) เป็นพิกัดของจุดปลายของเวกเตอร์ตำแหน่งที่เท่ากับเวกเตอร์ v



ก) เวกเตอร์ $v = OR$

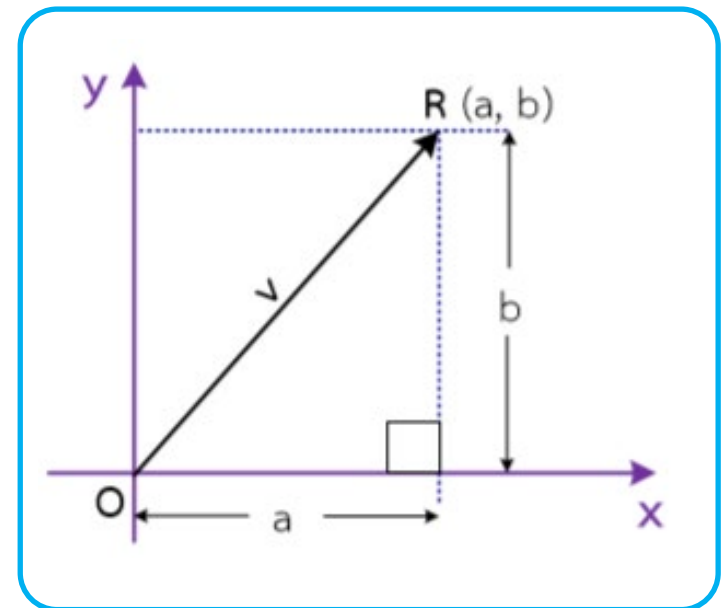


ข) เลื่อนเวกเตอร์ v ไปจากจุดกำเนิด

นิยาม : เวกเตอร์ v ในระนาบพิกัดฉากในเชิงพีชคณิต คือ คู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) เรียก a และ b ว่า ส่วนประกอบ (Component) ของเวกเตอร์ v และเวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายอยู่ที่เดียวกันซึ่งจะแทนด้วย $(0, 0)$

2.4 ขนาดของเวกเตอร์

นิยาม : ให้ $v = (a, b)$ เป็นเวกเตอร์ใน R (a, b) คือ เวกเตอร์ OR ในรูปจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส แสดงความสัมพันธ์ในเรขาคณิตระหว่างด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก กำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลรวมของกำลังสองของอีกสองด้านที่เหลือจะพบว่า ความยาวของ $OR = \sqrt{a^2 + b^2}$



การหาความยาวของเวกเตอร์ v

พีชคณิตของเวกเตอร์

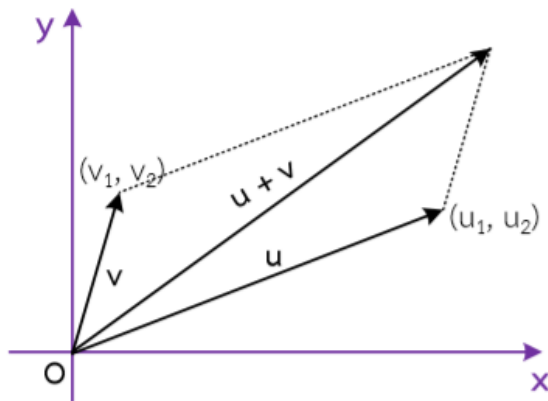
พีชคณิตของเวกเตอร์ ได้แก่ การบวกเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยจำนวนจริงหรือการคูณด้วยสเกลาร์ คำว่า “สเกลาร์” ในที่นี้หมายถึงจำนวนจริง

3.1 การบวกเวกเตอร์

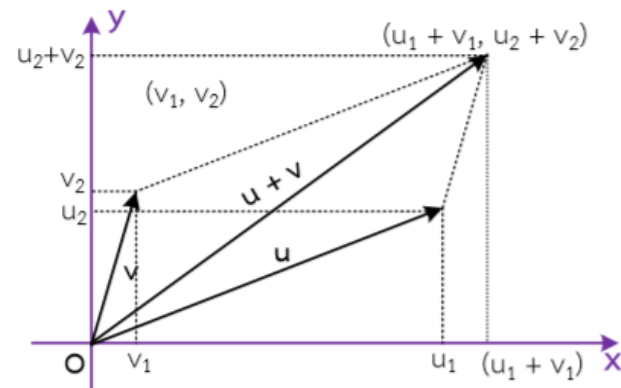
นิยาม : ให้ $u = (u_1, u_2)$ และ $v = (v_1, v_2)$ ผลบวกของเวกเตอร์ u และ v คือเวกเตอร์ลัพธ์ $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$



กล่าวได้อีกอย่างว่า การบวกเวกเตอร์ในเชิงพีชคณิต ทำได้โดยการบวกแต่ละส่วนประกอบของเวกเตอร์ ส่วนในเชิงเรขาคณิตจะหาผลบวกของเวกเตอร์ u และ v ได้โดยการสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี u และ v เป็นส่วนประกอบของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป ก.) ซึ่งผลบวกของ $u + v$ คือ เวกเตอร์ที่แทนด้วยลูกศรที่เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูป ข.) พบว่า พิกัดของจุดปลายของเส้นทแยงมุมซึ่งเป็นเวกเตอร์ลัพธ์ คือ $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ นั่นคือ $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$



ก) เวกเตอร์ลัพธ์ $u + v$



ข) พิกัดจุดปลายของเวกเตอร์ลัพธ์

การบวกเวกเตอร์

3.2

การลบเวกเตอร์

นิยาม : ให้ $u = (u_1, u_2)$ และ $v = (v_1, v_2)$ ผลต่างของเวกเตอร์ u และ v คือ

$$u - v = u + (-v) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

3.3

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

นิยาม : ให้ $u = (u_1, u_2)$ เป็นเวกเตอร์ และ c เป็นจำนวนจริง ผลคูณของเวกเตอร์ u กับสเกลาร์ c คือ เวกเตอร์ $cu = (cu_1, cu_2)$

เวกเตอร์ cu มีขนาดเท่ากับ $|c|$ เท่าของขนาดของ u ในเชิงเรขาคณิต cu คือ เวกเตอร์ที่แทนด้วยลูกศรที่มีความยาว $|c|$ เท่าของขนาดลูกศรที่แทน u และมีทิศทางเดียวกับ u ถ้า $c > 0$ และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ u ถ้า $c < 0$ และ cu เป็น เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $c = 0$

เฟสเซอร์

เฟสเซอร์ หมายถึง ปริมาณเวกเตอร์ที่หมุนเป็นวงรอบมีทั้งขนาดและทิศทาง ใช้เขียนแทนรูปคลื่นไซน์หรือรูปคลื่นโคไซน์ โดยขนาดของเวกเตอร์จะแทนด้วยค่าสูงสุดหรือค่าใช้งานของรูปคลื่น ส่วนทิศทางของเฟสเซอร์จะแทนด้วยมุมเฟส

เฟสเซอร์ไดอะแกรม หมายถึง แผนภาพเฟสเซอร์ที่ประกอบด้วยเส้นตรงตั้งแต่หนึ่งเส้นขึ้นไป โดยแต่ละเส้นใช้แทนหนึ่งปริมาณทางไฟฟ้ากระแสสลับที่เขียนลงบนระนาบเชิงซ้อน (Complex Plane) เทียบกับแกนอ้างอิงที่มุม 0° โดยที่ทิศทางหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุมบวกและหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุมลบ

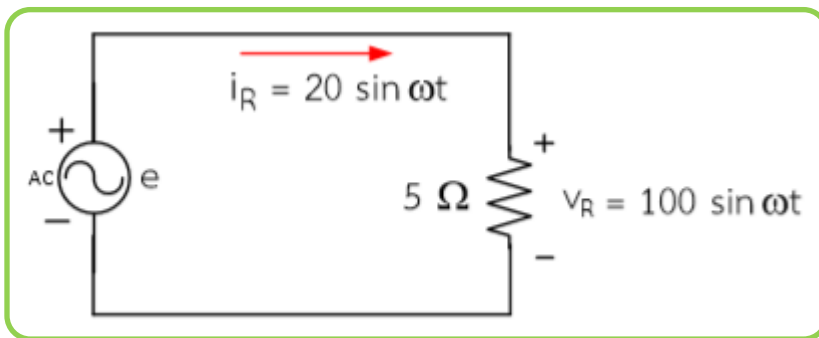


การประยุกต์ใช้เวกเตอร์ เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

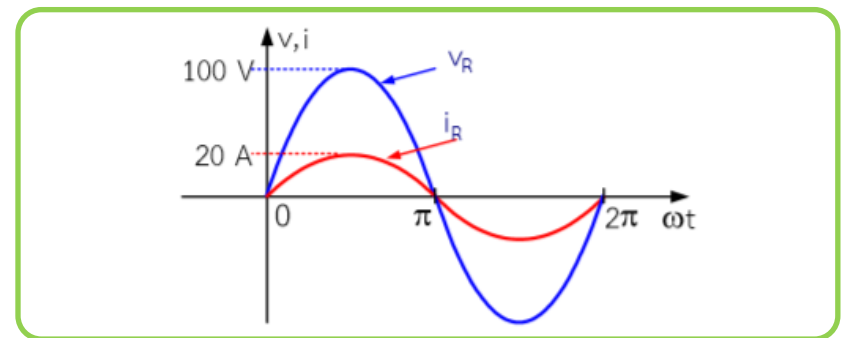
การประยุกต์ใช้เวกเตอร์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าเป็นการเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมแทนรูปคลื่นไซน์ในไฟฟ้ากระแสสลับเพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า เนื่องจากวิธีทางพีชคณิตไม่สามารถใช้กับสมการชั่วขณะได้โดยตรง จะต้องแปลงให้อยู่ในรูปสมการเฟสเซอร์ก่อนจึงจะใช้วิธีทางพีชคณิต โดยศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

แรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าในวงจร รูป ก)-ข) เฟสเซอร์แรงดัน V_R และกระแส I_R เท่ากับเท่าใด พร้อมเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรม



ก) วงจรความต้านทานอย่างเดียว



ข) รูปคลื่นแรงดันและกระแสของวงจร

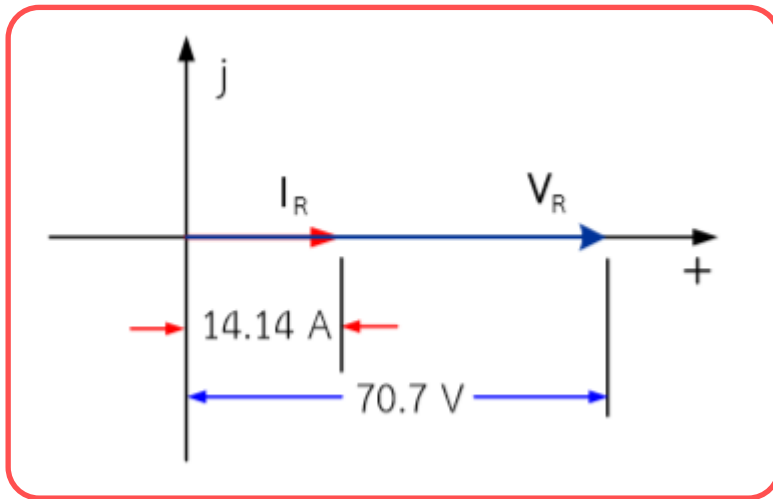
วิธีทำ

แปลงสมการชั่วขณะ v_R และ i_R ไปเป็นสมการเฟสเซอร์ V_R และ I_R

$$V_R = 0.707V_P = 0.707 \times 100\angle 0^\circ = 70.7\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{70.7\angle 0^\circ}{5\angle 0^\circ} = 14.14\angle 0^\circ \text{ A} \quad \text{หรือ} \quad I_R = 0.707I_P$$

คำตอบ นำค่า V_R และ I_R มาเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรม
แสดงขนาดและทิศทางแทนรูปคลื่น ดังรูป



เฟสเซอร์ไดอะแกรมของแรงดันและกระแส



เงื่อนไขความรู้



1. สมการ i_R และ v_R เรียกว่า สมการชั่วขณะ ใช้ตัวอักษรพิมพ์เล็ก ($i_R = I_P \sin \omega t$; $v_R = V_P \sin \omega t$)
2. $\omega = 2\pi f$ คือ ความเร็วเชิงมุม และ θ คือ มุมเฟส
3. โหลดมีสภาพเป็นความต้านทาน ความสัมพันธ์เฟสจึงเป็นเฟสร่วมกัน (inphase) ของแรงดันและกระแสเสมอ
4. การแปลงระหว่างค่าใช้งานและค่าสูงสุด ใช้สูตรรวม คือ $V_{rms} = 0.707V_P$; $V_P = 1.414 V_{rms}$ เมื่อ V_{rms} คือค่าใช้งาน, V_P คือค่าสูงสุดของคลื่นสัญญาณ
5. นำค่าใช้งานมาเขียนเฟสเซอร์ ($V_R = V_R \angle \theta$, $I_R = I_R \angle \theta$)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

เมทริกซ์

ความหมายและนิยามของเมทริกซ์

1.1 ความหมายของเมทริกซ์

เมทริกซ์ (Matrices) หมายถึง แถวลำดับของจำนวนจริง สัญลักษณ์ นิพจน์ หรือของฟังก์ชันที่นำมาเรียงกันเป็นแถวในแนวนอนและแนวตั้ง

1.2 นิยามของเมทริกซ์

นิยาม : ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ หมายถึง กลุ่มของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนชุดหนึ่งเรียงกัน m แถว (row) แถวละ n หลัก (column) โดยจัดเรียงให้อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ $[]$ หรือ $()$ ให้คลุมจำนวนที่อยู่ข้างใน และเรียกแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ว่าเป็นสมาชิกของเมทริกซ์ ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ โดยที่มี a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j โดยแทนสัญลักษณ์อย่างย่อ คือ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ หรือแทนเมทริกซ์ที่กล่าวนี้ด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

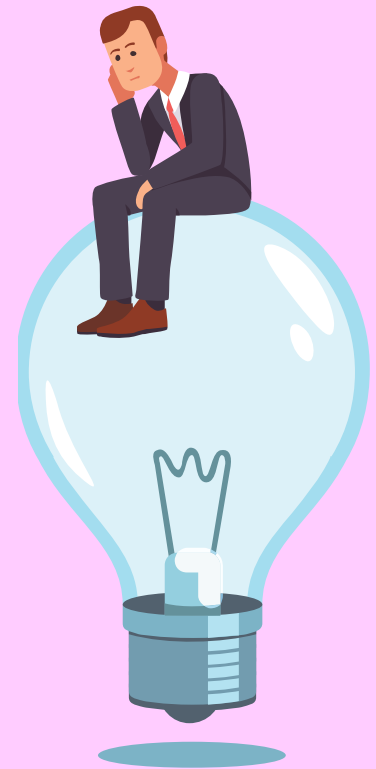
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

← แถวที่ 1
← แถวที่ 2
← แถวที่ 3

↑
↑
↑

หลักที่ 1 2 3



เมทริกซ์ A ขนาด 2×3 เนื่องจากมี 2 แถว และมี 3 หลัก และสมาชิกในตำแหน่ง (2, 3) ของเมทริกซ์ A คือ $a_{23} = 5$ และสมาชิกในตำแหน่ง (1, 2) ของเมทริกซ์ B คือ $a_{12} = 4$

เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix)

นิยาม : เมทริกซ์จัตุรัส คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน นั่นคือ $m = n$ และเรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด n เรียกสมาชิก $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ในเมทริกซ์ว่า เป็นสมาชิกบนแนวทแยงมุมหลัก (Main diagonal) ของเมทริกซ์ A และอาจเรียก A ว่า เมทริกซ์อันดับ n และเขียน A_n แทน $A_{n \times n}$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

นิยาม : เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มี 1 เป็นสมาชิกบนแนวทแยงมุมหลักส่วนสมาชิกอื่น ๆ เป็น 0 ทั้งหมด

เวกเตอร์แถว (Row vector)

นิยาม : เรียกเมทริกซ์ที่มีแถวเดียวว่า เวกเตอร์แถว

เวกเตอร์หลัก (Column vector)

นิยาม : เรียกเมทริกซ์ที่มีหลักเดียวว่า เวกเตอร์หลัก

เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)

นิยาม : เมทริกซ์ศูนย์ คือ เมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวเป็น 0 เขียนแทนด้วย 0

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix)

นิยาม : เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน คือ เมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งสมาชิกที่อยู่ใต้แนวทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular matrix)

นิยาม : เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง คือ เมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งสมาชิกที่อยู่เหนือแนวทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a matrix)

นิยาม : ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A เขียนแทนด้วย A^T คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับแถวและหลักของเมทริกซ์ A (A^T อ่านว่า เอทรานส์โพส)

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส (Determinant of a square matrix)

กำหนดให้เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$ หรือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

นิยาม : ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ให้ $A =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $\det(A) = |A| =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

นิยาม : ให้เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ สัญลักษณ์ M_{ij} หมายถึง เมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออก เรียก หรือ $\det(M_{ij})$ ว่า ไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij} ใน A เรียก $C_{ij} = (-1)^{i+j}$ ว่า โคแฟกเตอร์ (c_{of}) ของสมาชิก a_{ij} ใน A

เมทริกซ์ผกผัน (Adjoint matrix)

นิยาม : ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n = 2, 3, \dots$ เมทริกซ์ผกผันของ A คือ เมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^T$ เขียนแทนด้วย $\text{adj}(A)$

เมทริกซ์ผกผัน (Adjoint matrix)

นิยาม : ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n = 2, 3, \dots$ เมทริกซ์ผกผันของ A คือ เมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^T$ เขียนแทนด้วย $\text{adj}(A)$

พีชคณิตของเวกเตอร์

2.1 การเท่ากันของเมทริกซ์

นิยาม : ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เมทริกซ์ $A = B$ ถ้า $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$ (เมทริกซ์ที่เท่ากันต้องมีขนาดเดียวกัน)

2.2 การบวกเมทริกซ์

นิยาม : ให้ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ผลบวกของเมทริกซ์ A และ B คือ $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$ (เมทริกซ์ที่จะบวกกันได้ ต้องมีขนาดเดียวกัน)



2.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

นิยาม : ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ c เป็นสเกลาร์แล้ว $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$

2.4 การลบเมทริกซ์

จากคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ ทำให้สามารถหาผลต่างของเมทริกซ์ได้ ถ้าแทนเมทริกซ์ $(-1)A$ ด้วย $-A$ จะเรียก $-A$ ว่า นิเสธ (negative) ของ A ซึ่งหมายถึง เมทริกซ์ที่นำไปบวกกับ A แล้วได้เมทริกซ์ศูนย์

นิยาม : ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเดียวกัน $A - B = A + (-B)$

2.5 การคูณเมทริกซ์

นิยาม : ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ ผลคูณ AB คือ เมทริกซ์ $C = [c_{ij}]$ ที่มีขนาด $m \times p$ เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ (จะหาผลคูณ AB ได้ต่อเมื่อจำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวตั้ง (A) ต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวคูณ (B))

เมทริกซ์ผกผัน

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นมีวิธีที่ใช้ทั่วไปคือ การใช้เมทริกซ์ผกผัน การใช้กฎของคราเมอร์ และการใช้เมทริกซ์แต่งเติม ในหัวข้อนี้จะศึกษาเฉพาะการใช้เมทริกซ์ผกผันและกฎของคราเมอร์ของเมทริกซ์

นิยาม : ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ถ้า $AB = BA = I$ เรียก B ว่า เมทริกซ์ผกผันของ A (หรืออินเวอร์สการคูณของ A) และเขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$ ดังนั้น $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (A^{-1} อ่านว่า เออินเวอร์ส)



3.1

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

ถ้าระบบสมการเชิงเส้นมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรแล้ว เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ของระบบสมการจะเป็นเมทริกซ์จัตุรัส ดังนั้นอาจมี A^{-1} ในกรณีที่ A^{-1} สามารถใช้ A^{-1} ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ เพราะว่า $AA^{-1} = I_n$ และเนื่องจาก

$$AX = B \quad \text{หาค่า } X \text{ โดยนำค่า } A^{-1} \text{ มาคูณทั้งสองข้างสมการ}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad X = A^{-1}B$$

การแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ ถ้ามี 2 สมการ 2 ตัวแปร ได้เป็น

$$a_1x + b_1y = d_1 \quad \dots\dots\dots 1 \quad \bigcirc$$

$$a_2x + b_2y = d_2 \quad \dots\dots\dots 2 \quad \bigcirc$$

โดยนำสัมประสิทธิ์ของ x และ y มาเรียงเป็นแถว 2 แถว เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $AX = B$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

เรียก A ว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เรียก X ว่า เมทริกซ์ตัวแปร และเรียก B ว่า เมทริกซ์ค่าคงตัว

กฎของคราเมอร์ของเมทริกซ์

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร การหาอินเวอร์สการคูณ (A^{-1}) โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน $[adj(A)]$ อาจเสียเวลาในการคำนวณมาก กฎของคราเมอร์จึงเป็นอีกวิธีหนึ่งในการหาคำตอบโดยอาศัยเพียงการคำนวณค่าของดีเทอร์มิแนนต์

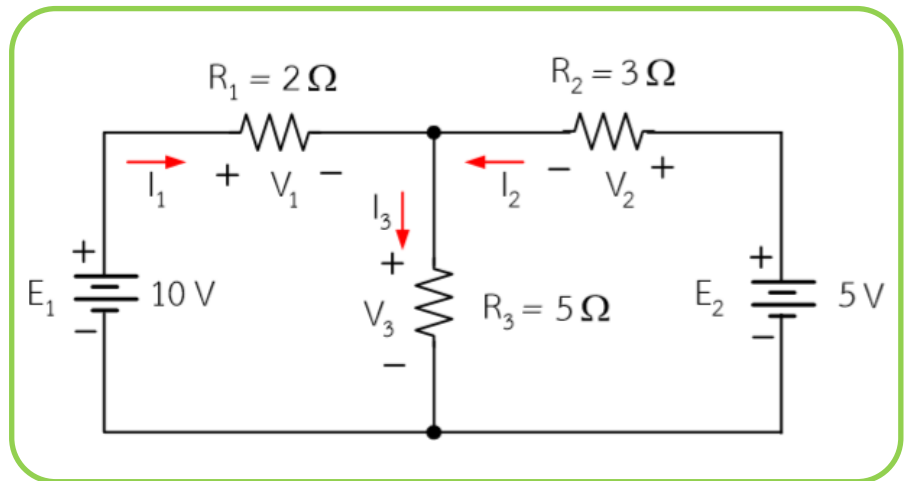


การประยุกต์ใช้เมทริกซ์ เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

การประยุกต์ใช้เมทริกซ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า ในหัวข้อนี้จะกล่าวเฉพาะการประยุกต์ใช้เมทริกซ์ผกผันและกฎของคราเมอร์ของเมทริกซ์ตามวิธีการที่กล่าวข้างต้น โดยศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

เขียนสมการของกระแสโดยใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ ได้เป็น $7I_1 + 5I_2 = 10$ และ $5I_1 + 8I_2 = 5$ จงคำนวณหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและกฎของคราเมอร์



วิธีทำ

เป็น

สมการกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวในวงจรโดยใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ ได้

$$7I_1 + 5I_2 = 10 \dots\dots\dots 1 \bigcirc$$

$$5I_1 + 8I_2 = 5 \dots\dots\dots 2 \bigcirc$$

ประยุกต์ใช้เมทริกซ์ผกผันเพื่อหาค่ากระแส

แปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ขนาด 2×2 ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = (7)(8) - (5)(5) \\ = 56 - 25 = 31$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{31} & \frac{-5}{31} \\ \frac{-5}{31} & \frac{7}{31} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.258 & -0.16 \\ -0.16 & 0.226 \end{bmatrix}$$

และ $X = A^{-1}B$ แทนค่าได้เป็น

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.258 & -0.16 \\ -0.16 & 0.226 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.258)(10) + (-0.16)(5) \\ (-0.16)(10) + (0.226)(5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.58 - 0.8 \\ -1.6 + 1.13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.78 \\ -0.47 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ได้ $I_1 = 1.78$, $I_2 = -0.47$ และ

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1.78 + (-0.47) = 1.31$$

นั่นคือ กระแสที่ไหลผ่าน R_1 คือ $I_1 = 1.78$ A

กระแสที่ไหลผ่าน R_2 คือ $I_2 = -0.47$ A

กระแสที่ไหลผ่าน R_3 คือ $I_3 = 1.31$ A

คำตอบ

หมายเหตุ

- ① $I_3 = I_1 + I_2$ เป็นผลจากกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ว่า ที่จุดใด ๆ ผลรวมของ กระแสไหลเข้าเท่ากับ ผลรวมของกระแสไหลออก
- ② $I_2 = -0.47$ เครื่องหมายลบ หน้าตัวเลขเป็นการบอกทิศทาง กระแสว่า ทิศทาง กระแสในวงจรมี ทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางที่ กำหนดไว้ตามหัวลูกศร

ประยุกต์ใช้กฎของคราเมอร์เพื่อหาค่ากระแส

แปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ขนาด 2×2 ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = (7)(8) - (5)(5)$$
$$= 56 - 25 = 31$$
$$I_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\det(A)}$$
$$= \frac{\det \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}{31} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{31}$$

$$= \frac{55}{31} = 1.77$$
$$I_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{bmatrix}}{\det(A)}$$
$$= \frac{\det \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}}{31} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}}{31}$$
$$= \frac{-15}{31} = -0.48$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1.77 + (-0.48) = 1.29$$

นั่นคือ กระแสที่ไหลผ่าน R_1 คือ $I_1 = 1.77 \text{ A}$

กระแสที่ไหลผ่าน R_2 คือ $I_2 = -0.48 \text{ A}$

กระแสที่ไหลผ่าน R_3 คือ $I_3 = 1.29 \text{ A}$

คำตอบ

หมายเหตุ

ในทางไฟฟ้าผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยอันเนื่องมาจากการปัดเศษทศนิยม ซึ่งถือได้ว่า ผลการคำนวณมีค่าเท่ากัน และสามารถตรวจสอบคำตอบ เช่นจากสมการ ① คือ $7I_1 + 5I_2 = 10$ โดยการแทนค่า ได้เป็น

$$(7)(1.77) + (5)(-0.48) = 10$$

$$12.39 - 2.4 = 9.99 \cong 10 \pi$$



หน่วยการเรียนรู้ที่ 4

ดีเทอร์มิแนนต์

ความหมายและนิยามของดีเทอร์มิแนนต์

1.1 ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์หรือตัวกำหนด หมายถึง จำนวนจริงที่อยู่คู่กับเมทริกซ์จัตุรัส ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แทนดีเทอร์มิแนนต์ของ A ด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$ ในการพิจารณาระบบสมการเชิงเส้นว่า มีคำตอบหรือผลเฉลยหรือไม่ หรือมีคำตอบชุดเดียวหรือหลายชุด จะพิจารณาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นได้

1.2 นิยามของดีเทอร์มิแนนต์

1. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 (ดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 1)

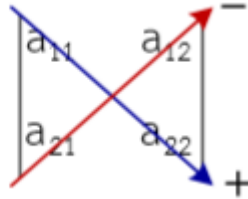
นิยาม : ถ้า $A = [a]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A คือ $\det(A) = a$ เช่น ให้ $B = [-6]$ ได้ $\det(B) = |-6|$ ในกรณีนี้ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×1 จะไม่เขียนว่า $|-6|$ แทนดีเทอร์มิแนนต์เพราะอาจทำให้เข้าใจผิดว่า เป็นค่าสัมบูรณ์ของ -6 ได้

2. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 (ดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 2)

นิยาม : ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 แล้ว $|A|$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

เมื่อใช้แผนภาพเห็นได้ว่าการคูณจำนวนในแนวทแยง โดยนำผลลัพธ์จากการคูณสมาชิกในแนวทแยงลง ($a_{11}a_{22}$) ลบด้วยผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงขึ้น ($a_{21}a_{12}$)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$




การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์

วิธีหาดีเทอร์มิแนนต์ที่กล่าวมาในข้อ 4.1.2 นั้นใช้ได้กับเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 1, 2 และ 3 เท่านั้น สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสที่มีอันดับ n ใด ๆ จะสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์

นิยาม : ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij} ซึ่งแทนด้วย M_{ij} คือเมทริกซ์ขนาด $(n - 1) \times (n - 1)$ ที่ได้จากการตัดแถวที่ i หลักที่ j ของ A ออก



สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ โดยวิธีกระจายโคแฟกเตอร์นั้น จะเกิดความยุ่งยากและใช้เวลานานขึ้นในการหาดีเทอร์มิแนนต์อันดับสูง ๆ สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์จะช่วยให้การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ทำได้ง่ายขึ้น ดังนี้

1. ถ้าสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทั้งหมดแล้ว $\det(A) = 0$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ได้ } \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

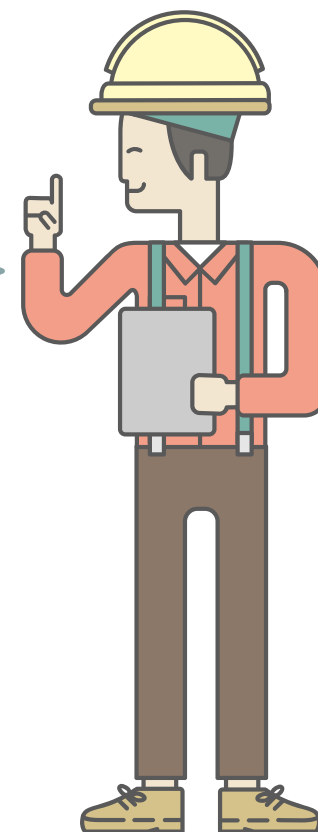
$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ได้ } \det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



2. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ i หลักที่ j ของ A ด้วย c เมื่อ c คือ สเกลาร์ใด ๆ แล้ว $\det(B) = c \times \det(A)$

เช่น $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -16 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

เห็นได้ว่า สมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ของ B เป็น 2 เท่า
ของสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ของ A เมื่อหา $\det(A) = 23$
และ $\det(B) = 46$ ดังนั้น $\det(B) = 2\det(A)$



3. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการสลับสองแถวหรือหลักใด ๆ ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det(B) = -\det(A)$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ได้ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จากการสลับแถวที่ 1 และ 3 ของเมทริกซ์ A

ได้ $\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

ดังนั้น $\det(B) = -\det(A)$



4. ถ้าสองแถวหรือหลักใด ๆ ของ A เหมือนกันแล้ว $\det(A) = 0$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -8 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -16 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$ เพราะแถวที่ 1 เหมือนกับแถวที่ 3

$\det(B) = 0$ เพราะหลักที่ 2 เหมือนกับหลักที่ 3

5. ถ้าแถวหรือหลักหนึ่งของ A เป็น c เท่าของอีกแถวหรือหลักหนึ่ง เมื่อ c คือ สเกลาร์ใด ๆ แล้ว $\det(A) = 0$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 8 \\ -8 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

เห็นได้ว่า แถวที่ 1 ของ A เกิดจากการคูณแถวที่ 3 ด้วย 4 ดังนั้น $\det(A) = 0$

6. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว $\det(A) = \det(A^T)$

เช่น $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $A^T = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

และ $\det(A) = \det(A^T) = 23$



7. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -5 \quad \text{และ} \quad \det(B) = -32 \quad \text{และ}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 18 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \det(AB) = 160$$

$$\text{ดังนั้น } \det(AB) = \det(A)\det(B) = 160$$

แต่มีข้อควรระวังในการใช้ คือ ดีเทอร์มิแนนต์
ของผลบวกไม่เท่ากับผลบวกของดีเทอร์มิแนนต์ นั่นคือ
 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$



กฎของคราเมอร์

กฎของคราเมอร์เป็นกฎที่ใช้สำหรับแก้ระบบสมการเชิงเส้น ผู้คิดค้นกฎนี้เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ ชื่อ กาเบรียล คราเมอร์ ซึ่งกฎของคราเมอร์ที่ได้กล่าวถึงในบทที่ 4 แล้วนั้นเป็นกฎเดียวกันที่ใช้ทั้งเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ ดังนี้

เมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร ให้ $AX = B$ เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการนี้ ให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ และ A เป็นเมทริกซ์

สัมประสิทธิ์ X เป็นเมทริกซ์ตัวแปร และ B เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้ คือ $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$, ..., $x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$

การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์ เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าในบทนี้ได้นำเสนอไว้ 2 วิธี คือ วิธีหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการเพิ่มหลัก และโดยการกระจายโคแฟกเตอร์ เมื่อได้ค่าดีเทอร์มิแนนต์แล้วจะประยุกต์ใช้กฎของคราเมอร์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า เช่น กระแสไฟฟ้า แรงดันไฟฟ้า ต่อไป



หน่วยการเรียนรู้ที่ 5

เรขาคณิตวิเคราะห์

ความหมายของเรขาคณิตวิเคราะห์

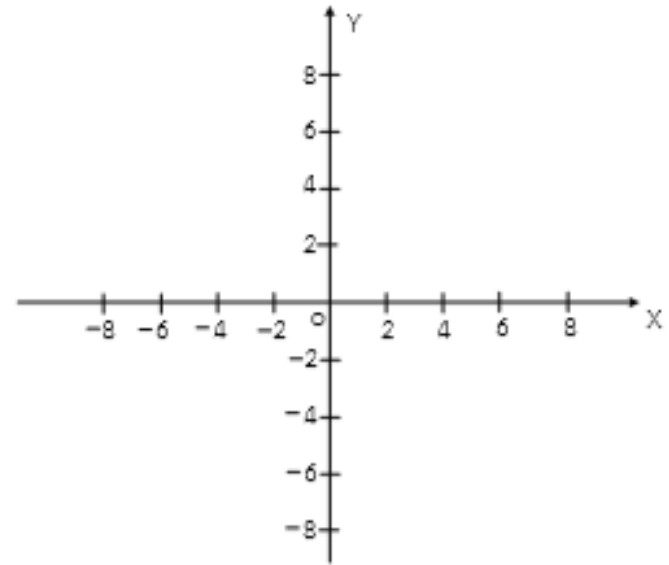
เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับรูปร่างว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างเส้น มุม การวัดพื้นที่ และปริมาตรที่เกี่ยวข้องกับรูปบนพื้นราบว่าด้วยรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และรูปวงกลม เป็นต้น และที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงว่าด้วยลูกบาศก์ ทรงกลม และกรวย เป็นต้น



ระนาบพิกัดฉาก

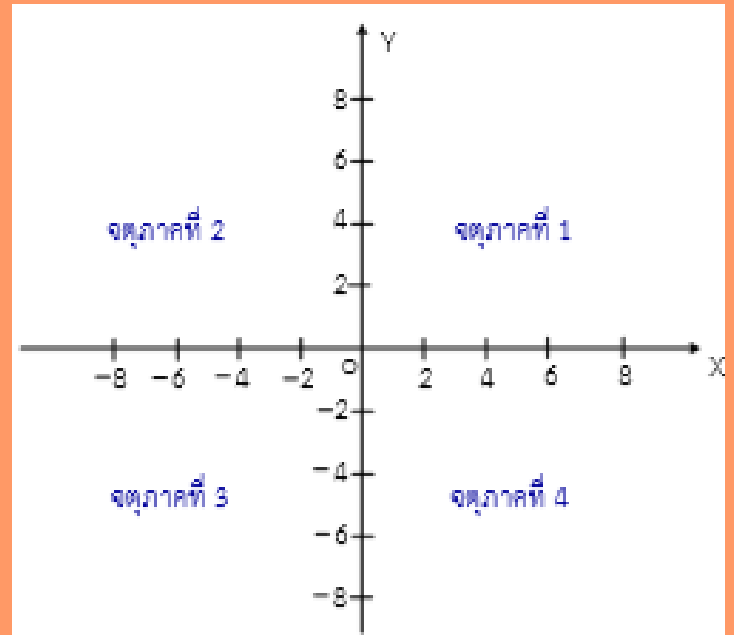
ระนาบพิกัดฉาก (Rectangular Plane)

คือ ระนาบที่เกิดจากเส้นจำนวนจริงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก เรียกว่า แกนพิกัดฉากหรือแกนโคออร์ดิเนต (Coordinate Axis) เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอน (Horizontal) เรียกว่า แกน x อีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวตั้ง (Vertical) เรียกว่า แกน y จุดที่เส้นทั้งสองตัดกันเรียกว่า จุดกำเนิด (Origin Point) จุดนี้จับคู่กับคู่อันดับ $(0, 0)$ เป็นจุดที่แทน 0 บนแกนจำนวนจริงทั้งสอง ดังรูป)



แกนโคออร์ดิเนต

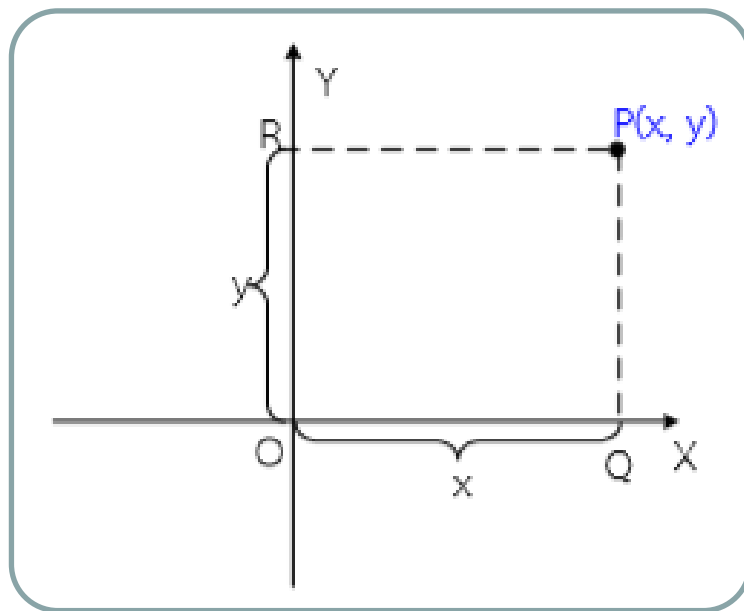
แกนโคออร์ดิเนตจะแบ่งระนาบ xy ออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค หรือ ควอดรนต์ (Quadrant) เช่น ส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน y และเหนือแกน x เรียกว่า จตุภาคที่ 2 และส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน y และใต้แกน x เรียกว่า จตุภาคที่ 4 เป็นต้น



จตุภาคทั้ง 4



ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ ดังรูป
แล้วลาก PQ ตั้งฉากกับแกน x ที่ Q และลาก PR
ตั้งฉากกับแกน y ที่ R ให้ระยะ OQ เป็น x เรียกว่า
พิกัด x (x -coordinate) หรือเรียกว่า พิกัดที่ 1
(Abscissa) ของจุด P ให้ระยะ OR เป็น y เรียกว่า
พิกัด y (y -coordinate) หรือเรียกว่า พิกัดที่ 2
(Ordinate) ของจุด P x และ y เรียกรวมว่า พิกัด
ของจุด P เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(x, y)$ อ่านว่า
จุด P มีพิกัด x, y



จุด P บนระนาบพิกัดฉาก

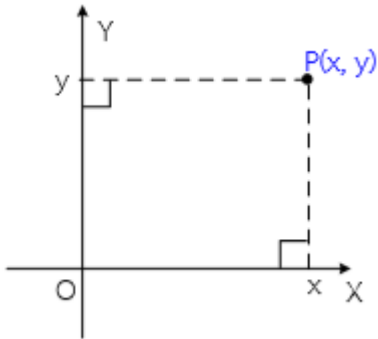
ดังนั้น จุด P บนระนาบจะมีคู่อันดับที่เขียนแทนด้วย (x, y) บอกตำแหน่ง และถ้ากำหนดคู่อันดับ (x, y) มาให้ก็สามารถหาตำแหน่งของจุด P ได้



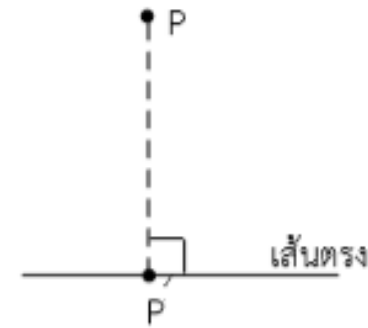
จุดและส่วนของเส้นตรง

3.1 โพรเจกชัน (Projection)

โพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรงใด ๆ คือ จุด P' ซึ่งเกิดจากลากเส้นตรงจากจุด P มาตั้งฉากกับเส้นตรงนั้น



โพรเจกชันของจุดบนแกน x
และแกน y



โพรเจกชันของ P บนเส้นตรง

โพรเจกชันของจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนแกน x คือจุด $P'(x, 0)$

โพรเจกชันของจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนแกน y คือจุด $P'(0, y)$ เช่น

โพรเจกชันของจุด $(3, 4)$ บนแกน x คือจุด $P'(3, 0)$

โพรเจกชันของจุด $(-5, 1)$ บนแกน y คือจุด $P'(0, 1)$

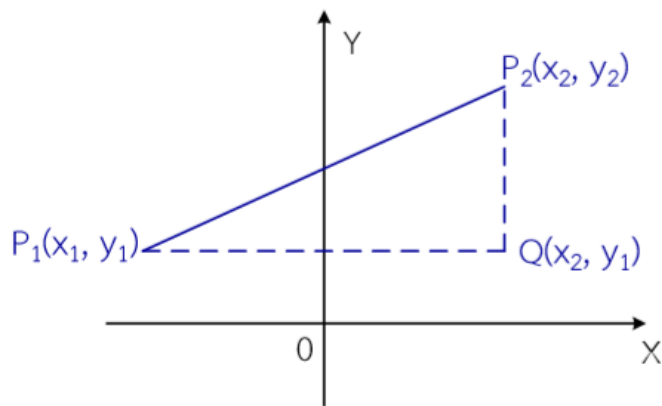
3.2

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนเส้นจำนวน เช่น P_1 มีพิกัดเป็นจำนวนจริง x_1 และ P_2 มีพิกัด x_2 ระยะ P_1P_2 คือ ค่าสัมบูรณ์ของ $x_1 - x_2$ หรือค่าสัมบูรณ์ของ $x_2 - x_1$ (โดยไม่คำนึงว่าจะใช้ x ใดเป็นตัวตั้งก่อน)เขียนแทนด้วย

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ ถ้าให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ อยู่บนเส้นตรงแล้ว ไม่ขนานกับแกน x และไม่ขนานกับแกน y จากจุด P_1 และ P_2 ลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน x และแกน y ตัดกันที่จุด Q แล้วจุด Q มีพิกัดเป็น (x_2, y_1)



ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

จากรูปได้ $|P_1Q| = |x_2 - x_1|$ และได้ $|QP_2| = |y_2 - y_1|$ เนื่องจากสามเหลี่ยม P_1QP_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ทฤษฎีพีทาโกรัส นั่นคือ ระยะห่างระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ หาได้จากสูตร

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

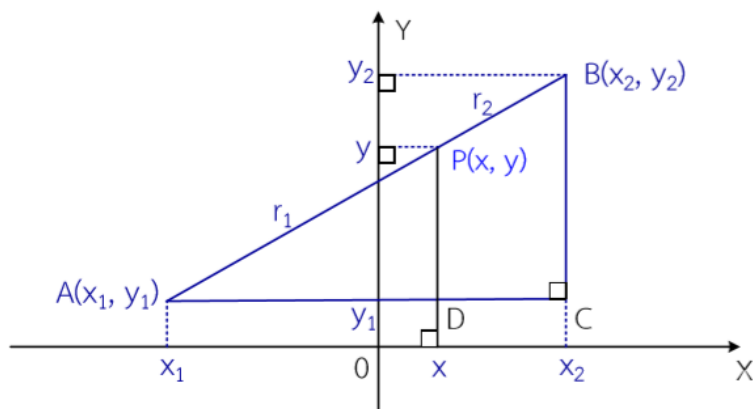
3.3

จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง

การแบ่งส่วนของเส้นตรงแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ การแบ่งภายในส่วนของเส้นตรง และการแบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง และในหัวข้อนี้กล่าวถึงเฉพาะการแบ่งภายในส่วนของเส้นตรง

การหาพิกัดของจุดแบ่งภายในส่วนของเส้นตรง เมื่อ P เป็นจุดแบ่ง ดังรูป

ให้ $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรงบนระนาบ



จุด P เป็นจุดแบ่งภายใน
ส่วนของเส้นตรง AB

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งภายในส่วนของเส้นตรง
 AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP : PB = r_1 : r_2$

ระยะ $AP = r_1$ และระยะ $AB = r_1 + r_2$

$$AD = x - x_1 \quad AC = x_2 - x_1$$

$$PD = y - y_1 \quad BC = y_2 - y_1$$

สามเหลี่ยม APD คล้ายกับสามเหลี่ยม ABC จะได้สมบัติที่เป็นจริง คือ

$$\frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC} = \frac{AP}{AB}$$

จาก

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AP}{AB} \quad \text{เมื่อแทนค่าด้วยระยะ}$$

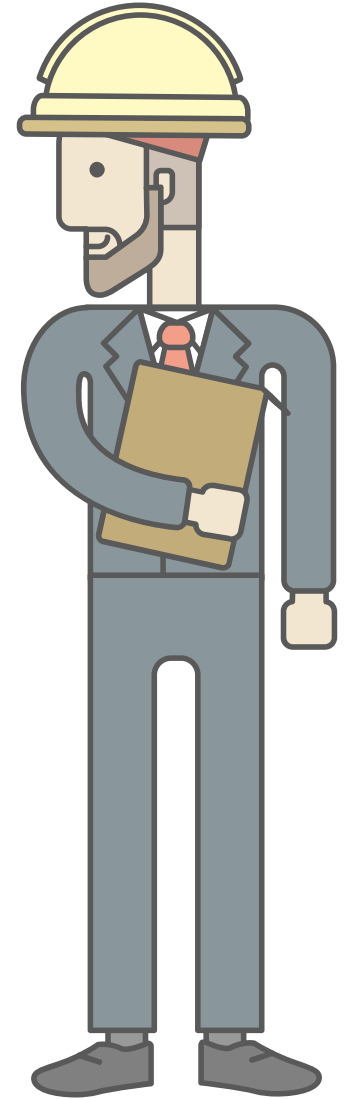
$$\text{ได้} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad \text{หาค่า } x \text{ ได้เป็น}$$

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2}$$

$$\text{จาก} \quad \frac{PD}{BC} = \frac{AP}{AB}$$

$$\text{ได้} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad \text{หาค่า } y \text{ ได้เป็น}$$

$$y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$



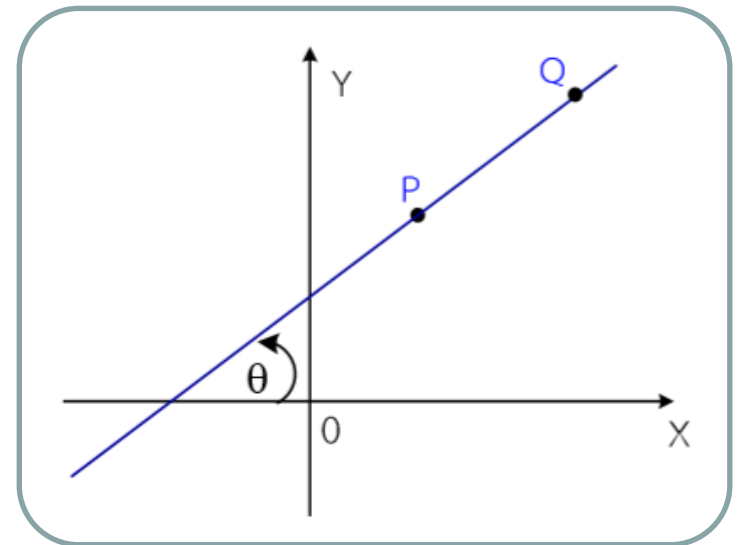
นั่นคือ พิกัดของจุดแบ่ง คือ $P\left(\frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2}, \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2}\right)$

ในกรณีที่แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน คือ อัตราส่วน $AP : PB = r_1 : r_2 = 1 : 1$ จะได้

พิกัดของจุดแบ่งคือ $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

3.4 ความเอียงและความชันของเส้นตรง

ถ้าให้ P และ Q เป็นจุดสองจุดใด ๆ บนระนาบ จะลากเส้นตรงผ่านจุด P และ Q ได้เพียงหนึ่งเส้นและเพียงเส้นเดียวเท่านั้น ดังรูปซึ่งการบอกลักษณะของเส้นตรงอาจบอกในลักษณะของความเอียงของเส้นตรงหรือความชันของเส้นตรงก็ได้



ลากเส้นตรงผ่านจุด P และ Q

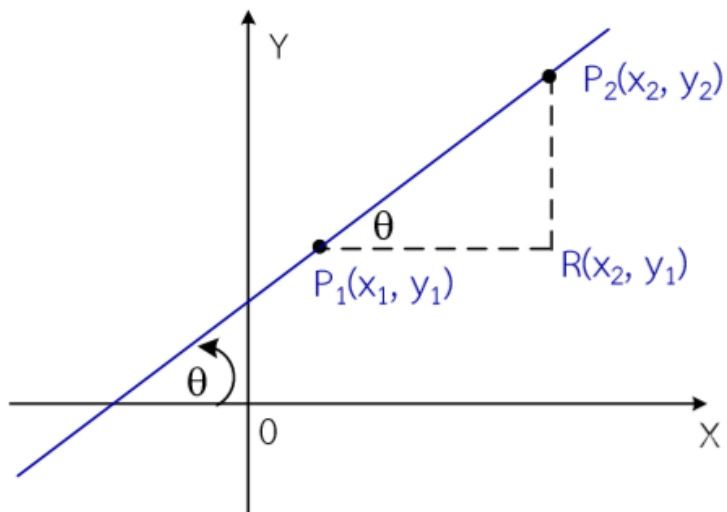
ความเอียง (Inclination) หรือมุมเอียงของเส้นตรง คือ มุมที่เส้นตรงทำกับแกน x ที่วัดจากแกน x ไปยังเส้นตรงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ความเอียงของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x มีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้น ถ้าให้ θ แทนความเอียงของเส้นตรง $0 \leq \theta < 180^\circ$ หรือ $0 \leq \theta < \pi$

ความชัน (Slope) ของเส้นตรง คือ ค่าแทนเจนต์ของมุมที่เส้นตรงนั้นทำกับแกน x หรือแทนเจนต์ของความเอียง ถ้าให้ m แทนความชันของเส้นตรงแล้ว จะได้ $m = \tan \theta$





เส้นตรงทำมุม θ กับแกน x



เมื่อ θ เป็นมุมแหลมหรือ $0 < \theta < 90^\circ$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

เมื่อ θ เป็นมุมป้านหรือ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

ถ้า $y_1 = y_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน X , $m = 0$

ถ้า $x_1 = x_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน Y จะหาค่า

m ไม่ได้ เพราะ $x_1 - x_2 = 0$

ถ้า $\theta < 90^\circ$ แล้ว m มีค่าเป็นบวก

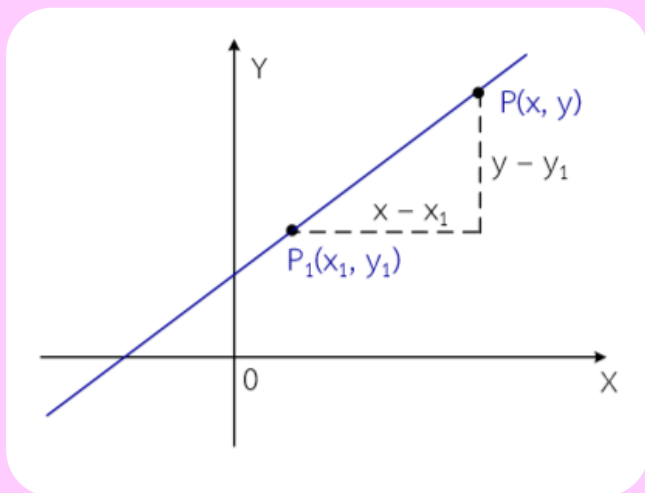
ถ้า $\theta > 90^\circ$ แล้ว m มีค่าเป็นลบ

3.5

สมการเส้นตรง

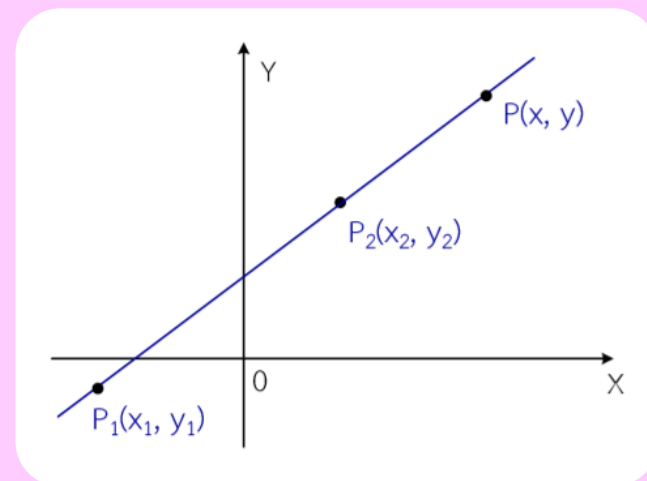
สมการเส้นตรงหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างจุดบนเส้นตรงตามเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดให้มีหลายรูปแบบ ดังนี้

1. สมการเส้นตรงเมื่อกำหนดจุดและความชันมาให้
เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชัน m



เส้นตรงที่กำหนดจุดและความชัน

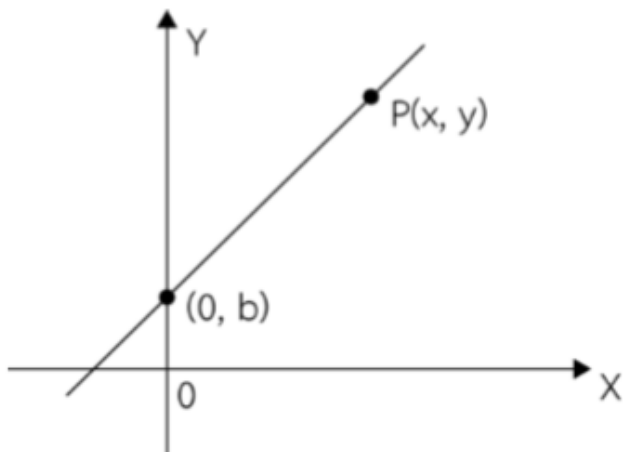
2. สมการเส้นตรงเมื่อกำหนดจุดสองจุดมาให้
เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$



เส้นตรงที่กำหนดจุดสองจุดมาให้

3. สมการเส้นตรงเมื่อกำหนดความชันและ
ส่วนตัดแกน Y

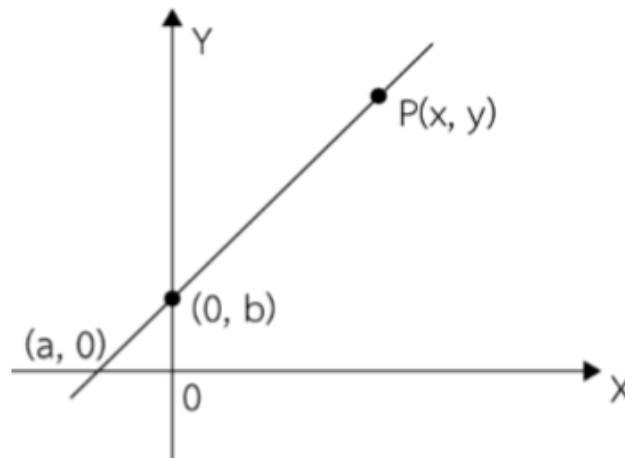
เส้นตรงที่มีความชัน m และส่วนตัดแกน Y
ที่จุด $(0, b)$



เส้นตรงที่กำหนดความชันและ
ส่วนตัดแกน

4. สมการเส้นตรงเมื่อกำหนดส่วนตัด
แกน x และส่วนตัดแกน y

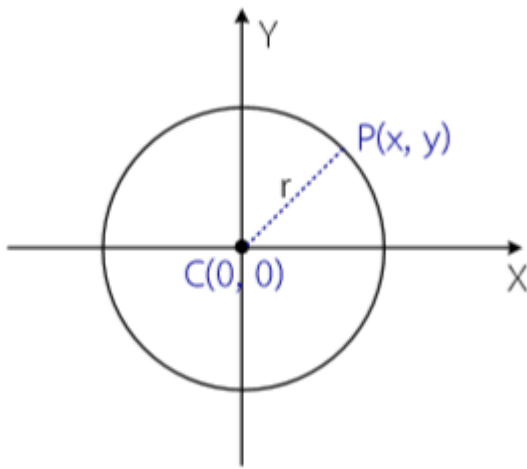
สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน x เป็น
 a และส่วนตัดแกน y เป็น b



เส้นตรงที่กำหนดส่วนตัดแกน x
และส่วนตัดแกน y

วงกลมและพาราโบลา

เส้นโค้งที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรงมาตรฐาน โดยไม่ผ่านจุดยอดของกรวยจะได้เส้นโค้ง ได้แก่ วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวเฉพาะวงกลมและพาราโบลา

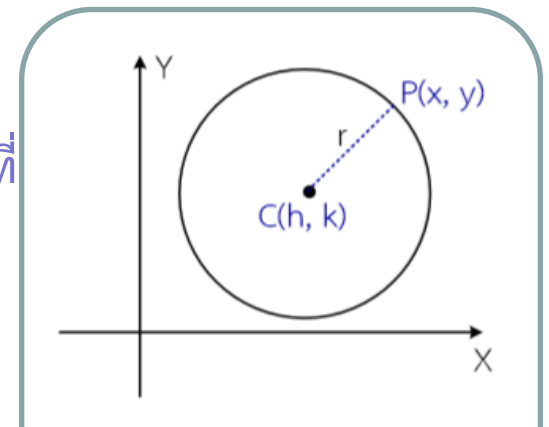


วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง
ที่ $C(0, 0)$ และมีรัศมี r

4.1 วงกลม (Circle)

วงกลม คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ จุดคงที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และระยะทางที่เท่ากัน เรียกว่า รัศมีของวงกลม (r)

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k)$ และรัศมี r



4.1

พาราโบลา (Parabola)

1.

ความหมายของพาราโบลา

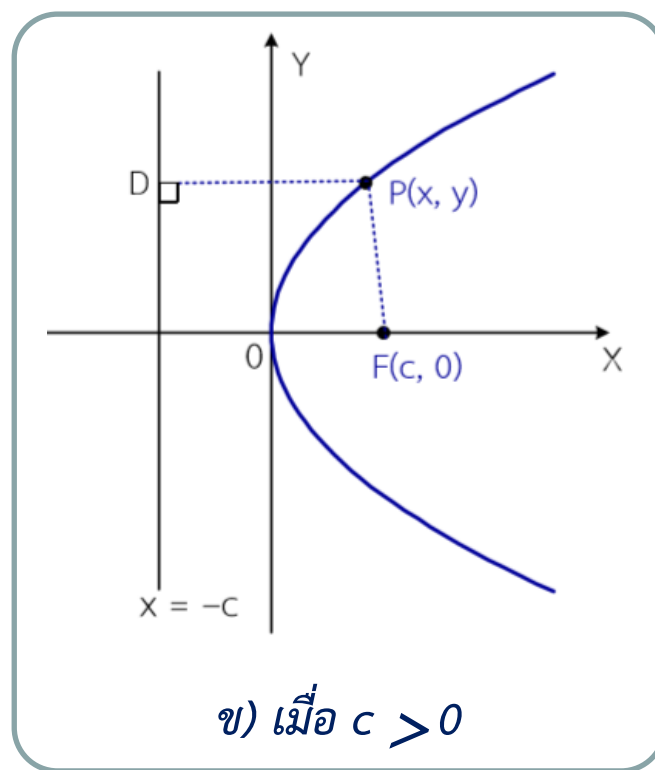
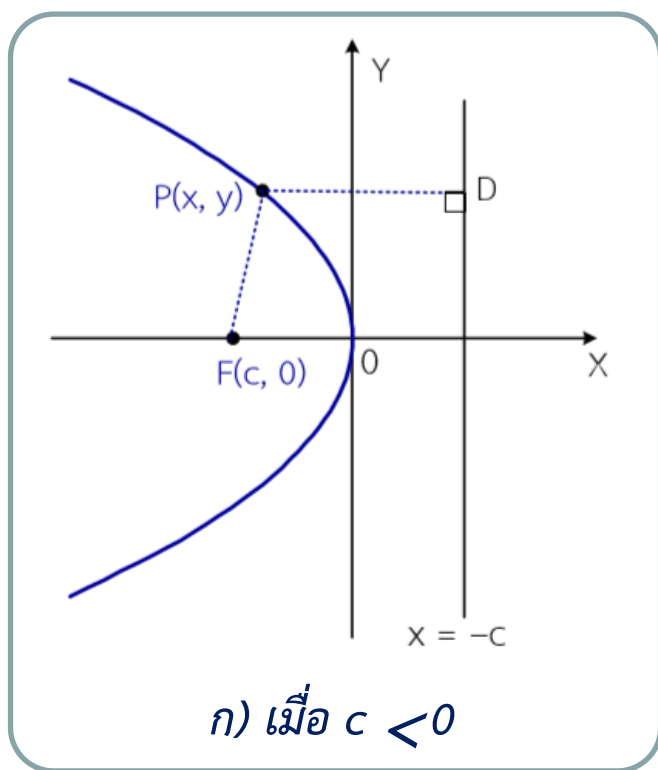
พาราโบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง และจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ โดยมีชื่อเรียกต่าง ๆ ดังนี้

-  เส้นตรงคงที่ เรียกว่า เส้นไดเรกตริกซ์ (Directrix)
-  จุดคงที่ เรียกว่า โฟกัส (Focus)
-  เส้นตรงซึ่งผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไดเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนของพาราโบลา
-  จุดที่กราฟของพาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า จุดยอดของพาราโบลา
-  คอร์ดที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า เลตัสเรกตัม (Latus Rectum)

2.

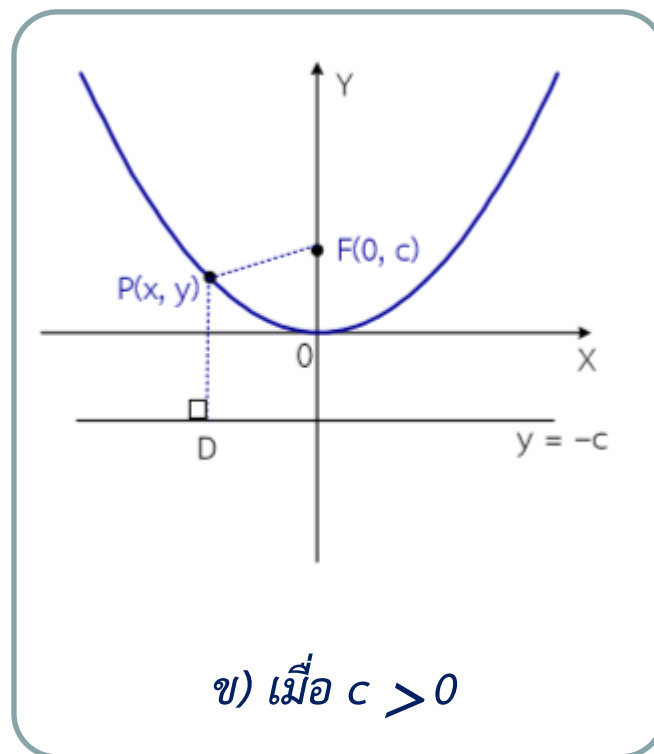
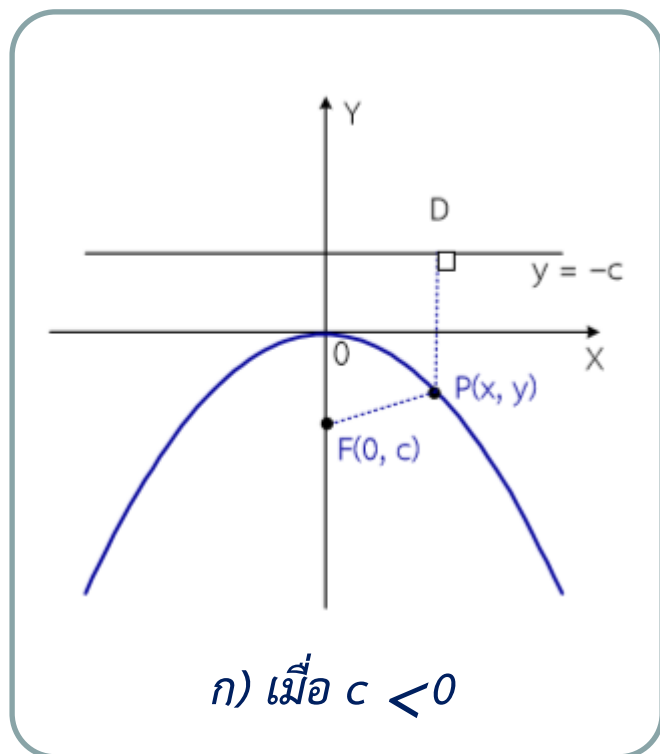
สมการของพาราโบลา

1) สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่ที่จุด $(c, 0)$ เส้นไดเรกทริกซ์คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน x เป็นแกนของพาราโบลา



พาราโบลาที่มีแกนของรูปอยู่บนแกน x

2) สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, c)$ เส้นไคเรตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน y เป็นแกนของพาราโบลา



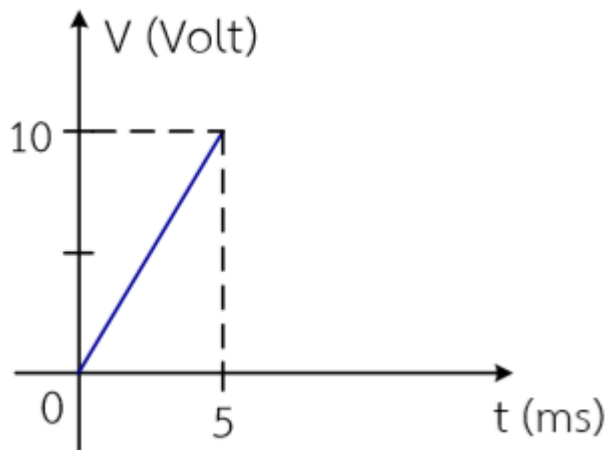
พาราโบลาที่มีแกนของรูปอยู่บนแกน y

การประยุกต์ใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

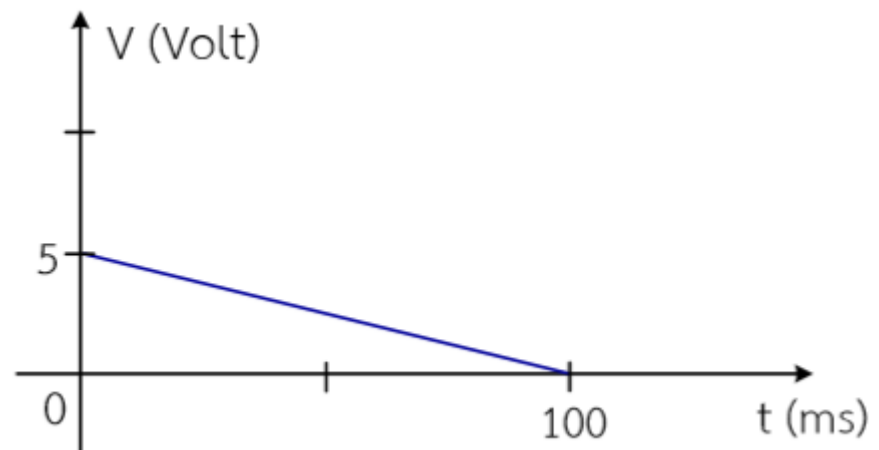
การประยุกต์ใช้เรขาคณิตวิเคราะห์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าสามารถศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

จากรูป ความชันของแรงดันไฟฟ้าเป็นเท่าใด



ก) แรงดันเพิ่มขึ้น



ข) แรงดันลดลง

วิธีทำ

ก) ในรูป ก) แรงดันเพิ่มขึ้นจาก 0 V ไปเป็น +10 V ในเวลา 5 ms ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{ความชัน: } m &= \frac{V_1 - V_0}{t_1 - t_0} = \frac{10 - 0}{5 - 0} \\ &= \frac{10 \text{ V}}{5 \text{ ms}} = 2 \text{ V/ms}\end{aligned}$$

นั่นคือ แรงดันเพิ่มขึ้น 2 V/ms

ข) ในรูป ข) แรงดันลดลงจาก +5 V ไปเป็น 0 V ในเวลา 100 ms ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{ความชัน: } m &= \frac{V_1 - V_0}{t_1 - t_0} = \frac{0 - 5}{100 - 0} \\ &= \frac{-5 \text{ V}}{100 \text{ ms}} = -0.05 \text{ V/ms}\end{aligned}$$

นั่นคือ แรงดันลดลง 50 V/s

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6

เรขาคณิตวิเคราะห์

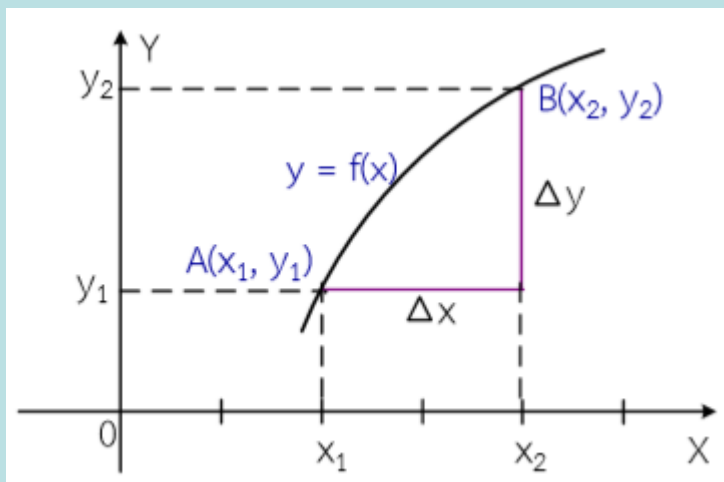
ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ที่มีสมบัติเฉพาะว่า ถ้าสมาชิกตัวหน้า (Domain) ของคู่อันดับใด ๆ ที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์นั้นมีค่าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลัง (range) ของคู่อันดับดังกล่าวต้องเท่ากัน กล่าวคือ ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อถ้า (x, y) และ (x, z) เป็นสมาชิกของ f แล้วจะได้ว่า $y = z$ ดังตัวอย่าง

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ f(x) = 2x + 1 \end{array} \right\} y = f(x)$$



อนุพันธ์ของฟังก์ชันตามความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ หมายถึง รูปแบบของสมการที่ประกอบด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ตั้งแต่ $x = x_1$ จนถึง $x = x_1 + \Delta x$ ดังรูป



กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

เลือก $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดใด ๆ บน $f(x)$

ถ้า x เปลี่ยนค่าไปจากเดิม Δx ทำให้ y เปลี่ยนค่าไปจากเดิม Δy

นั่นคือ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

บทนิยามของอนุพันธ์ : อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ ลิมิตของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เขียนแทนด้วย

$$\frac{dy}{dx} \text{ หรือ } \frac{df(x)}{dx} \text{ หรือ } y' \text{ หรือ } f'(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้ จะเรียกค่าของลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยขั้นตอนวิธีการหาค่าของอนุพันธ์ เรียกว่า ดิฟเฟอเรนเชียล (Differentiate) หรือที่เรียกกันสั้น ๆ ว่า ดิฟ (Diff)

$\frac{dy}{dx}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์ เป็นสัญลักษณ์แทน อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ x ขณะที่ x มีค่าใด ๆ หรือบางครั้งเรียกว่า ดิฟวายเทียบ กับเอกซ์ และ $\frac{dy}{dx} \neq \frac{y}{x}$

y' อ่านว่า วายไพร์ม และ $f'(x)$ อ่านว่า เอฟไพร์มเอกซ์หรือเอฟไพร์มออฟเอกซ์

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

3.1

ความหมายของฟังก์ชันพีชคณิต

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Functions) เป็นฟังก์ชันที่ค่าของฟังก์ชันเขียนในรูปสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยค่าคงที่ ตัวแปร และเครื่องหมายบวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ หรือยกกำลัง เช่น

$$y = 2x + 1, \quad f(x) = 4, \quad y = 3x - x^2, \quad y = |5x| + \sqrt{x+2}, \quad y = \frac{3x+2}{2x^3}$$



3.2 การใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้ नियามอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปของลิมิตจะค่อนข้างยุ่งยากในการคำนวณ จึงได้มีการหาอนุพันธ์โดยวิธีการใช้สูตรซึ่งทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่า ดังตาราง

ตารางที่ 6.1 สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต ถ้า c, n เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ $u = f(x), v = g(x), w = h(x)$

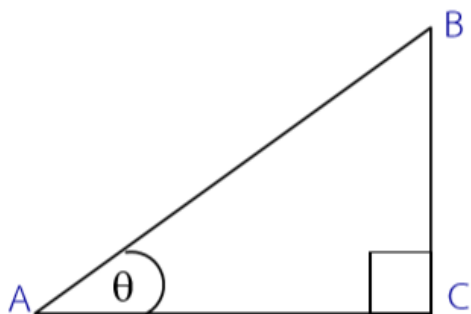
สูตรที่	สูตร	สูตรที่	สูตร
D-1	$\frac{d(c)}{dx} = 0$	D-6	$\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1} \frac{dv}{dx}$
D-2	$\frac{dx}{dx} = 1$	D-7	$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
D-3	$\frac{d(u+v+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$	D-8	$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
D-4	$\frac{dcv}{dx} = c \frac{dv}{dx}$	D-9	$\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{\frac{vdu}{dx} - \frac{udv}{dx}}{v^2}$
D-5	$\frac{d}{dx} \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \frac{dv}{dx}$		

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.1 ความหมายและนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Functions) หมายถึง ฟังก์ชันไซน์ (sine or sin) ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine or cos) ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent or tan) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent or cot) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant or sec) และฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant or cosec) เช่น $f(x) = 3 \sin 2x$ และ $f(x) = \sin x$ เป็นต้น

นิยาม : ให้สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังรูป



สามเหลี่ยมมุมฉาก

$$1) \sin \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$2) \cos \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$3) \tan \theta = \frac{BC}{AC}$$

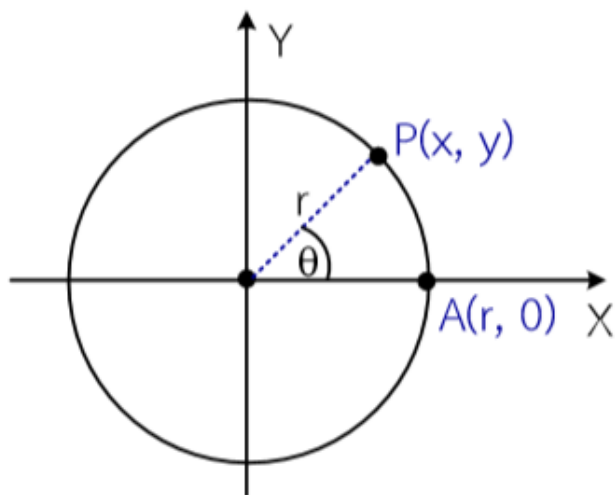
$$4) \operatorname{cosec} \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$5) \sec \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$6) \cot \theta = \frac{AC}{BC}$$

นิยาม : ให้วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้ามุม θ เรเดียน คือ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มีรัศมี r หน่วย ที่วัดทวนเข็มนาฬิกา เริ่มจากจุด $A(r, 0)$ ไปยังจุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายของแขนของมุมที่หมุนไป โดยที่

$$\text{ได้ดังรูป } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง
อยู่ที่จุดกำเนิด

$$1) \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$2) \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$3) \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$4) \operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y}$$

$$5) \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$6) \cot \theta = \frac{x}{y}$$

ทิศทางของมุม θ โดยใช้เครื่องหมายบวกและลบ

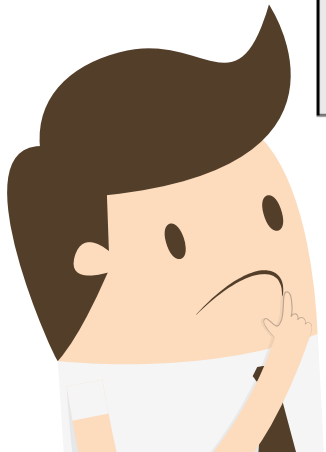
ถ้า $\theta > 0$ เป็นการวัดจากจุด A ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta < 0$ เป็นการวัดจากจุด A ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เพื่อความสะดวกในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จึงนำค่าฟังก์ชันสำหรับมุมในจุดภาคที่ 1 มาสร้างตารางได้ ดังตาราง

ตารางที่ 6.2 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

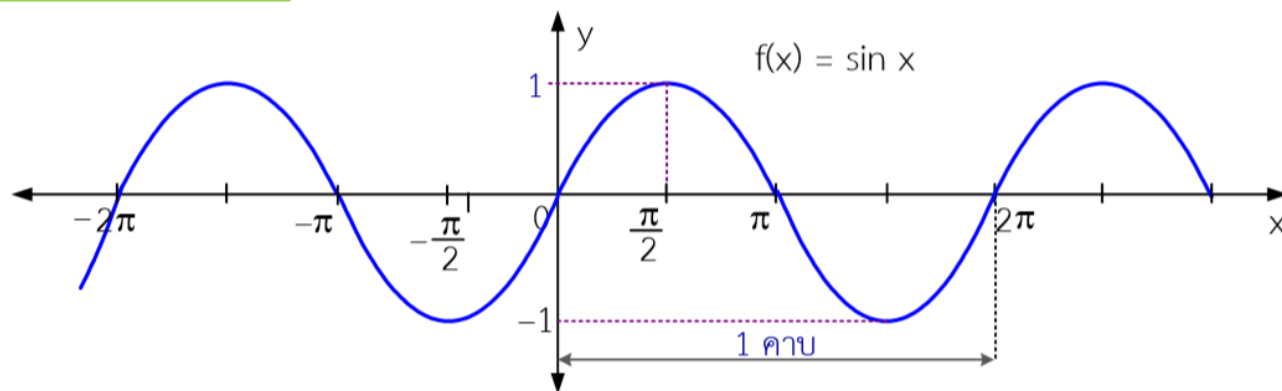
องศา	0	30°	45°	60°	90°
เรเดียน	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม



นิยาม : ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันคาบก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $\pi > 0$ ที่ $f(x + p) = f(x)$ ทุกค่า x ในโดเมน f เรียกค่า p ที่น้อยที่สุดว่า คาบของ f

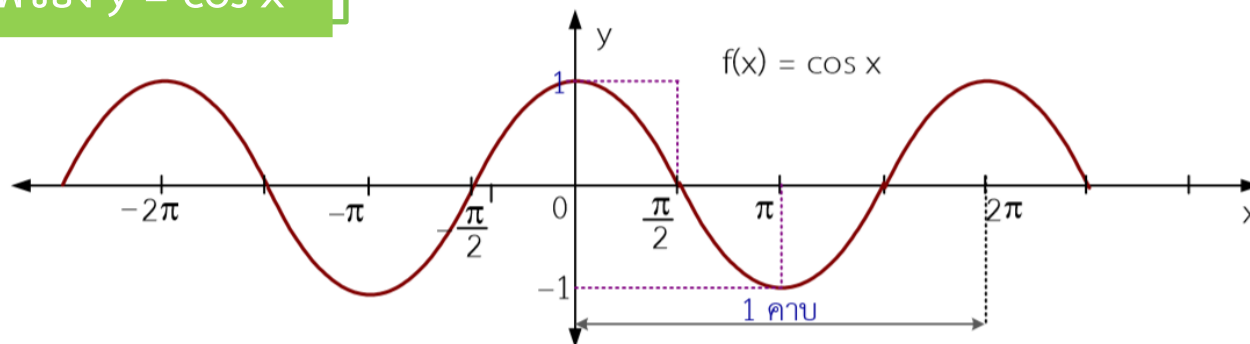
กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบนระนาบพิกัดฉากจะนิยมเปลี่ยนตัวแปร θ ไปเป็นตัวแปร x และเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = \cos x$ หรือ $y = \sin x$ ซึ่งกราฟของ $y = \cos x$ หรือ $y = \sin x$ จะมีลักษณะซ้ำรูปเดิม เมื่อหมุนวนมาครบรอบค่าใดค่าหนึ่ง เรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า ฟังก์ชันคาบ (Periodic Functions) โดยที่คาบ (Period) หมายถึง ความยาวช่วงสั้นที่สุดที่ทำให้กราฟซ้ำรูปเดิม และแอมพลิจูด (amplitude) มีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ

1. กราฟของ $y = \sin x$

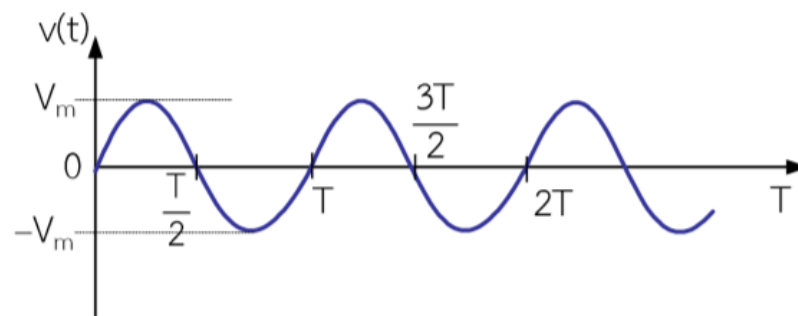
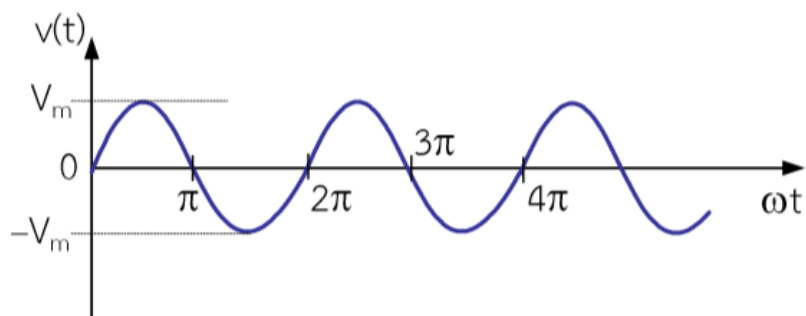


กราฟของ $y = \sin x$

2.

กราฟของ $y = \cos x$ กราฟของ $y = \sin x$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบนระนาบพิกัดฉาก เมื่อนำไปใช้ทางไฟฟ้าจะเปลี่ยนตัวแปร x ไปเป็นตัวแปร ωt หรือ t และเขียนเป็นตัวอย่างของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $v(t) = V_m \sin \omega t$

ก) เมื่อเป็นฟังก์ชันของ ωt ข) เมื่อเป็นฟังก์ชันของ t รูปคลื่นไซน์ของ $V_m \sin \omega t$

3.2 การใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังตารางที่ 6.3 และศึกษาการใช้สูตรจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตาราง สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรที่	สูตร	สูตรที่	สูตร
D-10	$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$	D-13	$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
D-11	$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$	D-14	$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
D-12	$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	D-15	$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

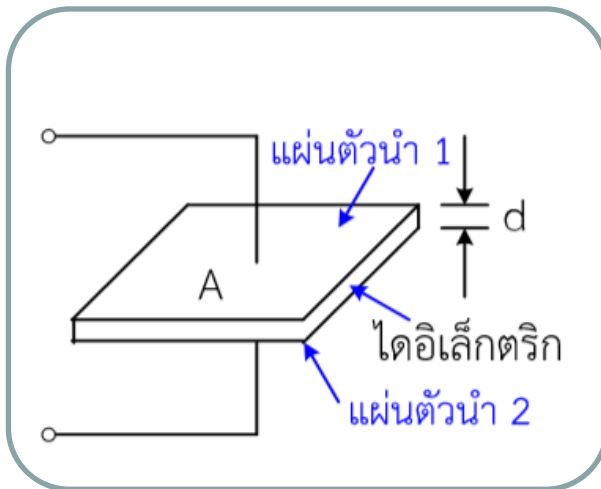
การประยุกต์ใช้อุปกรณ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

การประยุกต์ใช้อุปกรณ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า จะศึกษาถึงอุปกรณ์สองชนิด คือ ตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ อุปกรณ์ทั้งสองนี้เป็นองค์ประกอบเชิงเส้นและอธิบายคุณสมบัติได้ด้วยสมการอนุพันธ์เชิงเส้น (ตัวต้านทานไม่สามารถสะสมพลังงานไฟฟ้าได้) ซึ่งทั้งสองเป็นอุปกรณ์แบบพาสซีฟที่สามารถกักเก็บและจ่ายพลังงานที่จำกัดได้ แต่ไม่สามารถจ่ายกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยในช่วงเวลาที่ไม่จำกัดได้ ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าของอุปกรณ์ทั้งสองนี้ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันเทียบกับเวลา

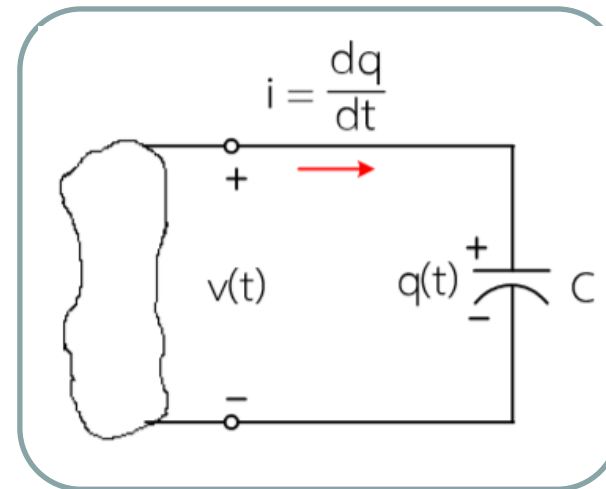


4.1 ตัวเก็บประจุ (Capacitors)

ตัวเก็บประจุ เป็นองค์ประกอบวงจรที่ประกอบด้วยแผ่นตัวนำ 2 แผ่น มีขนาดพื้นที่ A วางแยกขนานกันด้วยระยะ d มีไดอิเล็กตริก (Dielectric) ซึ่งเป็นวัสดุมีสภาพเป็นฉนวนไฟฟ้า กั้นอยู่ระหว่างแผ่นตัวนำ ดังรูป



ก) โครงสร้างของตัวเก็บประจุ



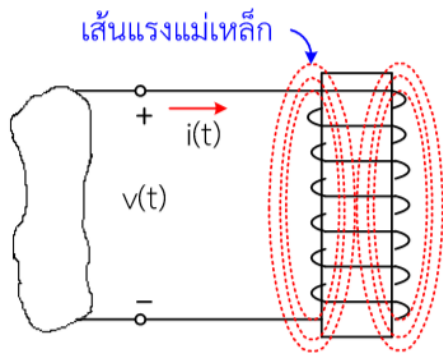
ข) สัญลักษณ์ทางไฟฟ้า

ตัวเก็บประจุและสัญลักษณ์ทางไฟฟ้า

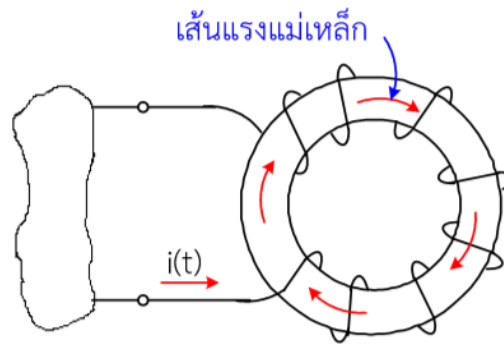
4.2

ตัวเหนี่ยวนำ (Inductors)

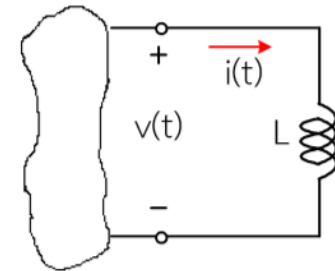
ตัวเหนี่ยวนำเป็นองค์ประกอบวงจรที่ประกอบด้วยลวดตัวนำเป็นขดลวด (Coil) ดังรูป



ก) ตัวเหนี่ยวนำแกนอากาศ



ข) ตัวเหนี่ยวนำแกนเฟอร์ไรต์



ค) สัญลักษณ์ของตัวเหนี่ยวนำ

ตัวเหนี่ยวนำ 2 ชนิดและสัญลักษณ์ทางไฟฟ้า

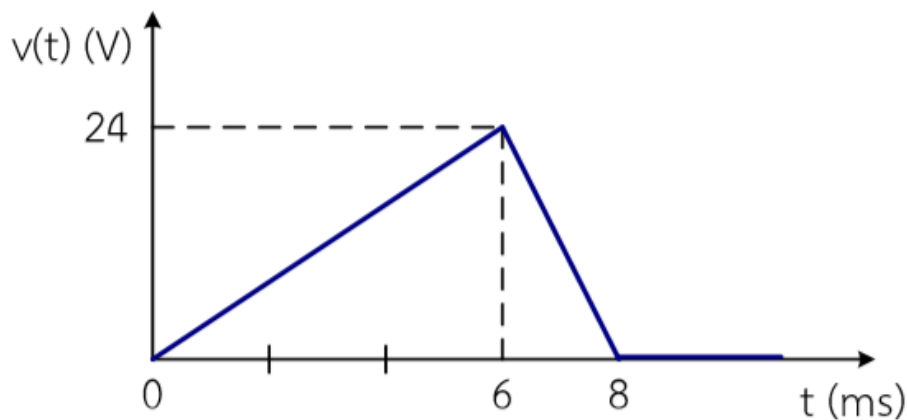
4.3

การประยุกต์ใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การประยุกต์ใช้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า โดยศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

จากรูป เป็นรูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุตัวหนึ่ง ขนาด $5\ \mu\text{F}$ จงหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวมันในช่วงเวลา $t = 0-6\ \text{ms}$ และ $t = 6-8\ \text{ms}$ (ตัวอย่างนี้ต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ 5.18)



รูปคลื่นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ

เงื่อนไขความรู้



กระแสจะไหลผ่านตัวเก็บประจุก็ต่อเมื่อแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุมีการเปลี่ยนแปลง (ไม่คงที่) ถ้าคงที่ผลการอนุพันธ์จะได้เท่ากับศูนย์

วิธีทำ

ที่เวลา $0 \leq t \leq 6$ ms หาสมการเส้นตรง $v = mt + b$

$$v = (4 \times 10^3)t \dots\dots\dots ①$$

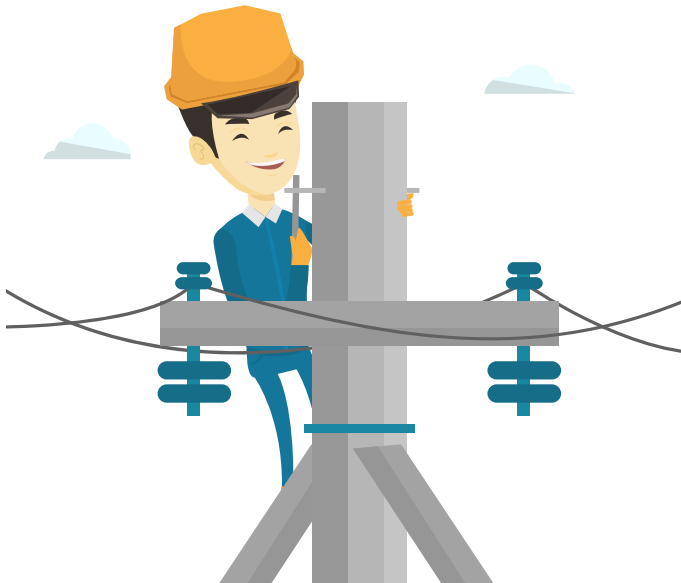
ที่เวลา $6 \leq t \leq 8$ ms หาสมการเส้นตรง $v = mt + b$

$$v = (-12 \times 10^3)t + 96 \dots\dots\dots ②$$

ที่เวลา $8 \text{ ms} \leq t$, หาสมการเส้นตรง $v = mt + b$

$$v = 0 \dots\dots\dots ③$$

ที่เวลา $0 \leq t \leq 6$ ms นำสมการเส้นตรง ① มาแทนค่าในสูตร $i(t)$ เพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้า



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

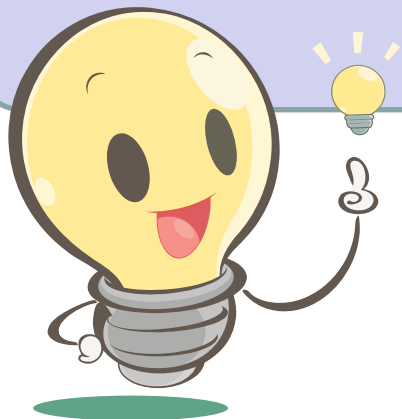
$$= (5 \times 10^{-6}) \frac{d(4 \times 10^3)t}{dt}$$

$$i(t) = (5 \times 10^{-6})(4 \times 10^3) \frac{dt}{dt}$$

$$= 20 \text{ mA}$$

ดังนั้นที่ $0 \leq t \leq 6 \text{ ms}$ กระแสไหล 20 mA

คำตอบ



เมื่อ C คือ ค่าความจุ 5 μF แปลงหน่วยเป็นฟารัดได้ (5×10^{-6}) ซึ่งเป็นค่าคงที่

1 ประยุกต์ใช้สูตร D-4

$$= \frac{dcv}{dx} = c \frac{dv}{dx}$$

เมื่อ $c = (4 \times 10^3)$ และ $v = t$

2 ประยุกต์ใช้สูตร D-2

$$\frac{dx}{dx} = 1 \text{ นั่นคือ } \frac{dt}{dt} = 1$$

ที่เวลา $6 \leq t \leq 8$ ms นำสมการเส้นตรง ② มาแทนค่าในสูตร $i(t)$ เพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้า

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} = (5 \times 10^{-6}) \frac{d[(-12 \times 10^3)t + 96]}{dt} \\ &= (5 \times 10^{-6}) \frac{d(-12 \times 10^3)t}{dt} \\ &= (5 \times 10^{-6})(-12 \times 10^3) \frac{dt}{dt} \\ i(t) &= -60 \text{ mA} \end{aligned}$$

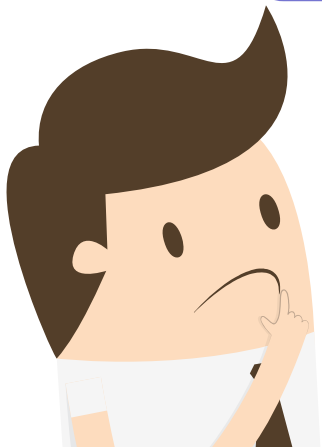
สูตรของอนุพันธ์

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d(cv)}{dx} = c \frac{dv}{dx}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่



ที่ $6 \leq t \leq 8$ ms กระแสไหล -60 mA

(ทิศทางตรงข้ามกับที่เวลา $0 \leq t \leq 6$ ms) คำตอบ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 7

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

ความหมายที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์

สำหรับความหมายของปริพันธ์ การหาปริพันธ์ และปฏิยานุพันธ์จะมีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกัน ดังนี้

1.1 ปฏิยานุพันธ์

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ มาให้ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ (Derivative) ได้จะเขียนแทนด้วย $f'(x)$ และเรียกวิธีการนี้ว่า การหาอนุพันธ์ (Differentiation) ถ้าวิธีการดังกล่าวทำตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะเรียกว่า ปฏิยานุพันธ์ (Anti-Differentiation)

ปฏิยานุพันธ์ เป็นการหาฟังก์ชัน $F(x)$ เมื่อกำหนด $F'(x)$ มาให้ โดยจะเรียกฟังก์ชัน $F(x)$ นี้ว่า ปฏิยานุพันธ์ (Anti-Derivative) ของ $F'(x)$

นิยาม : ฟังก์ชัน $F(x)$ เรียกว่า ปฏิยานุพันธ์ ของฟังก์ชัน $f(x)$ ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ $f(x)$

1.2 ปริพันธ์

ถ้าพิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเทียบกับ x คือ $= f'(x)$ และเรียก $f'(x)dx$ ว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ (Differential) ของฟังก์ชัน

การหาปริพันธ์หรือการอินทิเกรต (Intergrate) เป็นการพิจารณาว่า $f'(x)dx$ เป็นค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันใด ๆ โดยผลลัพธ์ของการหาปริพันธ์ ดังกล่าวเรียกว่า ปริพันธ์ (Integral)

$f'(x)dx$ มีค่าปริพันธ์อยู่หลายค่า จะเขียนอยู่ในรูป $f(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน คือ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int f(x)dx + F(x) + c$$

โดยที่ $\int$ เครื่องหมาย เรียกว่า เครื่องหมายปริพันธ์หรือเครื่องหมายอินทิกรัล

$f(x)$ เรียกว่า อินทิแกรนด์หรือตัวถูกปริพันธ์ (Integrand)

x เรียกว่า ตัวแปรของการหาปริพันธ์

dx เป็นตัวบ่งบอกว่า การหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x

การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ในวิธีการที่จะหา $f(x)$ จากอนุพันธ์ $f'(x)$ ที่กำหนด พร้อมทั้งค่าคงที่อีกค่าหนึ่งของ $f(x)$ นั้นแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอนด้วยกัน คือ ขั้นตอนที่ 1 หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันทั้งหมด และ ขั้นตอนที่ 2 หาอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับค่าที่กำหนดให้ เช่น

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\frac{x^2}{2}$$

เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x

c เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจงว่าเป็นค่าใด

ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $f(x)$ โดยทั่วไปนั้น ไม่สามารถหาได้อย่างง่ายดายนัก อย่างไรก็ตามจากฟังก์ชันอนุพันธ์ที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 6 ยกมาเปรียบเทียบกับตัวอย่างดังตารางที่ 7.1 และนำมาสรุปเป็นสูตรของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ทั้งของ ฟังก์ชัน พหุนาม และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้เป็นพื้นฐาน ดังตารางที่ 7.2

ตารางที่ 7.1 ตัวอย่างเปรียบเทียบอนุพันธ์กับการหาปริพันธ์

ฟังก์ชัน	อนุพันธ์	การหาปริพันธ์
$y = x^3$	$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$	$\int 3x^2 dx = x^3 + c$
$y = 2t^{1.5}$	$\frac{d2t^{1.5}}{dt} = 3t^{0.5}$	$\int 3t^{0.5} dt = 2t^{1.5} + c$

ตารางที่ 7.2 สูตรการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

สูตรที่	สูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	สูตรที่	สูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
I-1	$\int dx = x + c$	I-7	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
I-2	$\int k dx = kx + c$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่	I-8	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
I-3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$	I-9	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
I-4	$\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$	I-10	$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
I-5	$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$	I-11	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
I-6	$\int c u dx = c \int u dx$	I-12	$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

การหาปริพันธ์จำกัดเขต

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ปริพันธ์จำกัดเขตของ

ฟังก์ชัน $f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เมื่อลิมิตนี้หาค่าได้ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x)dx$$

โดยเรียก a ว่า ขีดจำกัดล่าง หรือขอบล่าง (Lower Limit)

b ว่า ขีดจำกัดบน หรือขอบบน (Upper Limit)

$\int_a^b f(x)dx$ อ่านว่า ปริพันธ์จำกัดเขตของ $f(x)$ เทียบกับ x จาก $x = a$ ถึง $x = b$

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ หรือ $F'(x) = f(x)$ การหา $\int_a^b f(x)dx$ ได้ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

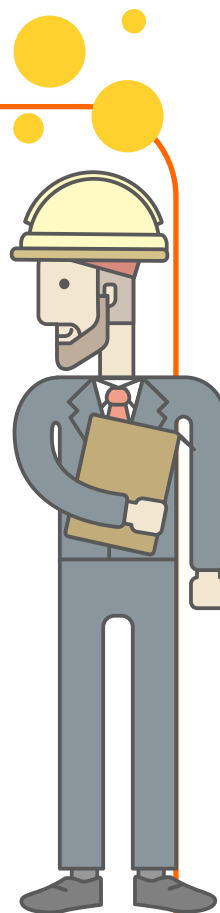
และการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน ไม่จำเป็นต้องบวกค่าคงที่ใด ๆ (c) เข้าไป
เนื่องจากเมื่อแทนค่า $x = a$ และ $x = b$ ใน $F(x)$ แล้ว $F(b) - F(a)$ ค่า c จะลบกันหมดไป
สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต เป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นในการศึกษาเพื่อให้หาค่าได้รวดเร็ว
ขึ้น ดังนี้

$$1. \int_a^b f(x)dx = 0 \quad \text{เมื่อ } a = b$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

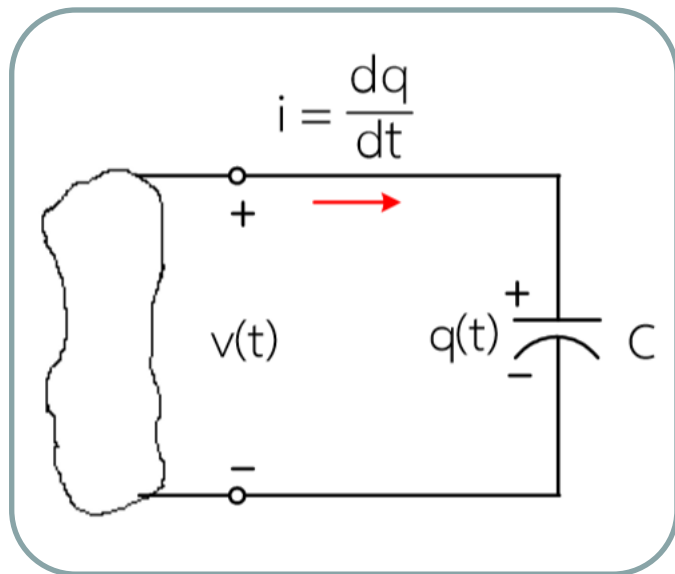
$$3. \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่ใด ๆ}$$

$$4. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



การประยุกต์ใช้ปริพันธ์เพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า

การประยุกต์ใช้อินทิกรัลเพื่อหาค่าปริมาณทางไฟฟ้า จะศึกษาถึงอุปกรณ์สองชนิด คือ ตัวเก็บประจุ และตัวเหนี่ยวนำ รวมทั้งพื้นที่ใต้โค้งของรูปคลื่นไซน์ โดยศึกษาเฉพาะที่จะประยุกต์ใช้สูตรปริพันธ์จากตัวอย่างต่อไป



4.1 ตัวเก็บประจุ (Capacitors)

วงจรตัวเก็บประจุ ดังรูปกระแส i เป็นอัตราการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าต่อหน่วยเวลา ถ้านำค่าประจุ $q = Cv$ แทนในสมการ $i = \frac{dq}{dt}$ จะได้ค่ากระแสที่ไหลในวงจรคือ $i = C \frac{dv}{dt}$

เมื่อเขียนสมการใหม่ได้

$$dv = \frac{1}{C} i dt \dots\dots\dots ①$$

อินทิเกรตสมการ 1 ในช่วงเวลา $t = -\infty$ ถึง t
สมมติให้ $v(-\infty) = 0$ และได้แรงดันตกคร่อม
ตัวเก็บประจุ คือ

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \dots\dots\dots ②$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(t) dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt \dots\dots\dots ③$$



เมื่อ $v(t_0)$ เป็นแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลา t_0 ซึ่งเกิดจากการสะสมประจุช่วงเวลา $t = -\infty$ ถึง t_0 และพลังงานสะสมในตัวเก็บประจุสามารถจ่ายเป็นกำลังไฟฟ้าไปยังองค์ประกอบวงจรได้
กำลังไฟฟ้านี้ คือ

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{..... ④}$$

และพลังงานสะสมในสนามไฟฟ้า เมื่ออินทิเกรตกำลังไฟฟ้าเทียบกับเวลา ได้เป็น

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t Cv(t) \frac{dv(t)}{dt} dt = C \int_{-\infty}^t v(t) \frac{dv(t)}{dt} dt$$

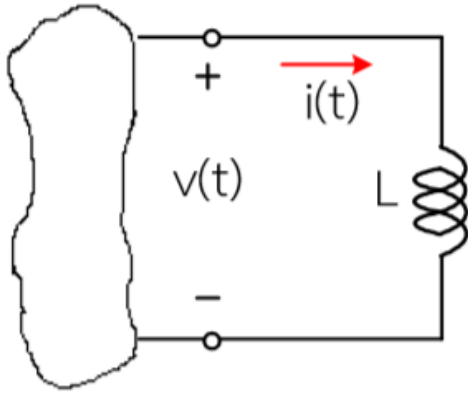
ดังนั้น $w(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt + w(t_0) \quad \text{..... ⑤}$



4.1

ตัวเหนี่ยวนำ (Inductors)

วงจรตัวเหนี่ยวนำดังรูปในตัวเหนี่ยวนำ สนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงสามารถเหนี่ยวนำให้เกิดแรงดัน v ขึ้น ค่าแรงดันนี้เป็นอัตราส่วนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเทียบกับเวลา



แรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ
กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำคือ

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(t) dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \end{aligned}$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \text{..... ⑥}$$



พลังงานสะสมในตัวเหนี่ยวนำสามารถจ่ายเป็นกำลังไฟฟ้าไปยังองค์ประกอบ
วงจรได้ กำลังไฟฟ้านี้ คือ

$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$p(t) = \left(L \frac{di(t)}{dt} \right) i(t) \dots\dots\dots ⑦$$

ดังนั้น พลังงานสะสมในตัวเหนี่ยวนำได้เป็น

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t \left(L \frac{di(t)}{dt} \right) i(t) dt \dots\dots\dots ⑧$$



4.1

ค่าเฉลี่ยของรูปคลื่นไซน์

ค่าเฉลี่ย (Average Values) คือ ค่าเฉลี่ยของพื้นที่รูปคลื่นไซน์ครึ่งรอบของกระแสไฟฟ้าหรือแรงดันไฟฟ้า ดังนั้นค่าเฉลี่ยที่แท้จริงจึงไม่มีในทางปฏิบัติ เพราะจะหาค่าเพียงครึ่งรอบด้านใดด้านหนึ่งเท่านั้น

ค่าเฉลี่ยของคลื่นไซน์ (Sine Wave Averages) คือ รูปคลื่นไซน์มีลักษณะที่เหมือนกันทั้ง 2 ด้าน คือ พื้นที่ด้านบนแกน x จะเท่ากับพื้นที่ด้านล่างของแกน x เมื่อหาค่าพื้นที่ใน 1 รอบจะเท่ากับศูนย์ ถ้าไม่คำนึงถึงความถี่และมุมเฟส ดังนั้น กำหนดให้

$$V_{av} = \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} V_m \sin(\omega t) d(\omega t)$$

$$V_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_m \sin(\omega t) d(\omega t)$$

..... (9)

เมื่อ V_{av} คือ ค่าแรงดันเฉลี่ยของรูปคลื่นไซน์

V_m คือ ค่าแรงดันสูงสุดของรูปคลื่นไซน์

หรือ $V_{av} = 0.637V_m$ ในทำนองเดียวกัน $I_{av} = 0.637I_m$ (10)