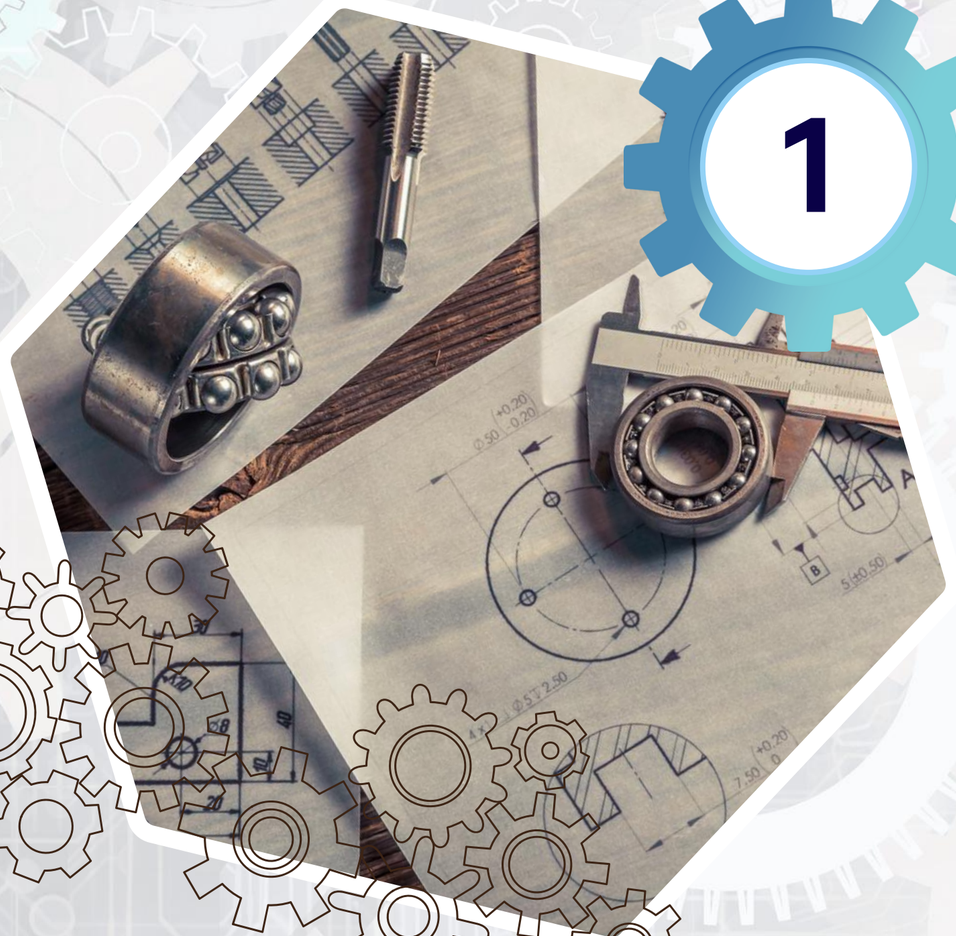
บทเรียนที่

1

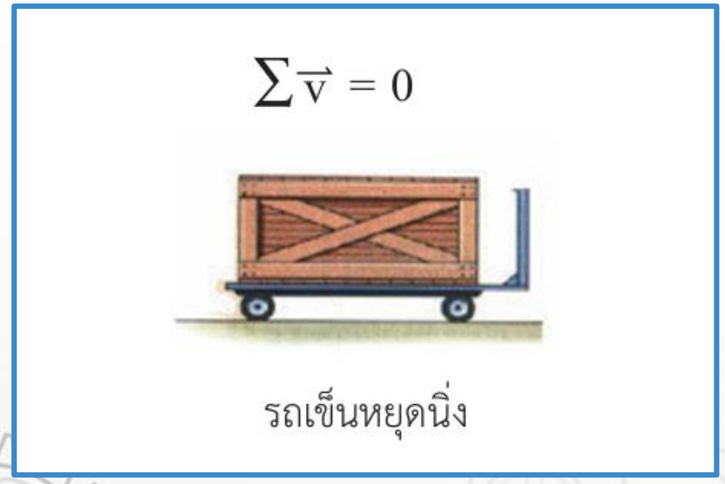


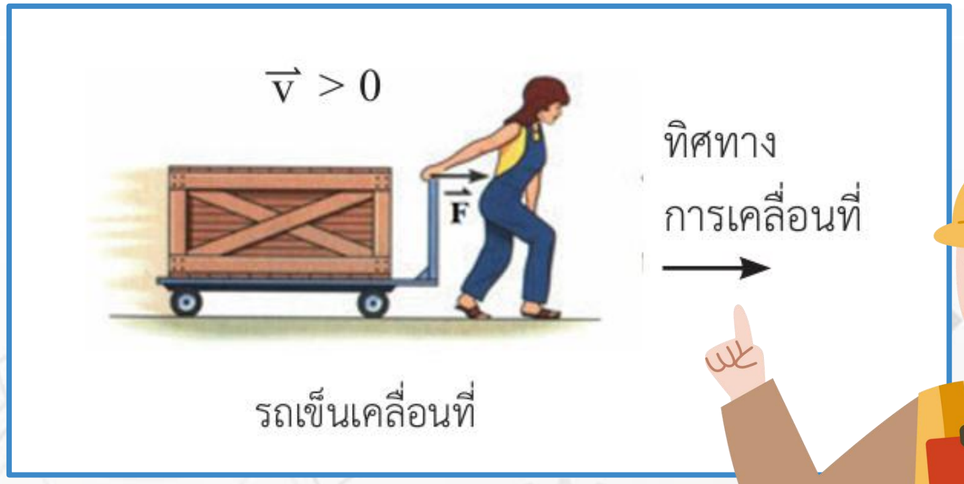
ระบบแรง

วิชา กลศาสตร์เครื่องกล

1 ความหมายของแรง

แรง (Force) คือ การกระทำจากวัตถุภายนอกที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของระบบทางกายภาพ โดยแรงเป็นการกระทำของวัตถุหนึ่งต่ออีกวัตถุหนึ่ง และทำให้วัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในทิศทางของแรงดังรูป หน่วยของแรงเป็นนิวตัน (N)



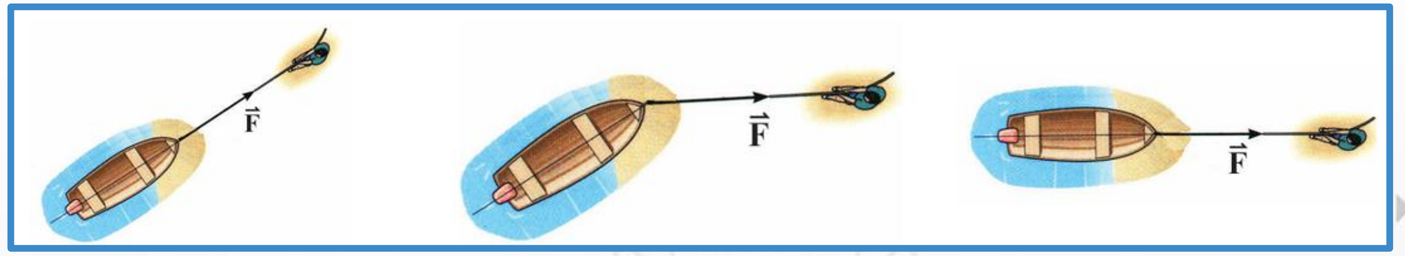


เมื่อแรงกระทำกับอีกวัตถุหนึ่ง วัตถุนั้นจะได้รับผลกระทบดังนี้

1) วัตถุที่อยู่นิ่งอาจจะเริ่มเคลื่อนที่ ดังรูป

2) ความเร็วของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่เปลี่ยนแปลงไป

3) ทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุอาจเปลี่ยนแปลงไป ดังรูป



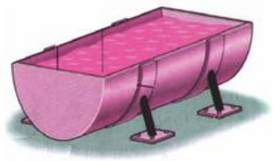
4) รูปร่างและขนาดของวัตถุอาจเปลี่ยนแปลงไป

2 ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

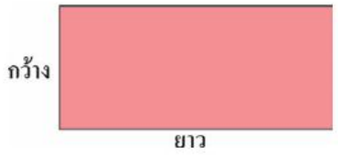
2.1 ปริมาณสเกลาร์

ปริมาณที่มีแต่ขนาด ไม่มีทิศทาง ซึ่งมีค่าเป็นตัวเลขบวกหรือลบ เช่น พื้นที่ ความยาว มวล ปริมาตร พลังงาน ความถ่วงจำเพาะ ความหนาแน่น เวลา ระยะทาง ดังรูป

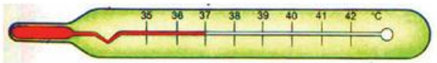
(ก) จำนวนเงิน



(ข) ปริมาตรน้ำ



(ค) พื้นที่ของสี่เหลี่ยม

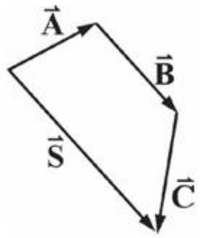


(ง) อุณหภูมิ

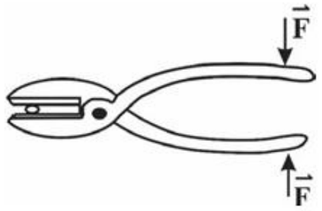
(จ) ความยาว

2.2 ปริมาณเวกเตอร์

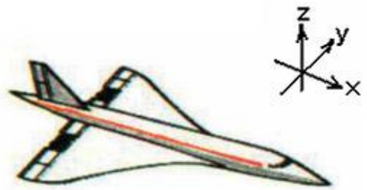
ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น การกระจัด (Displacement) ความเร็ว ความเร่ง แรง น้ำหนัก โมเมนต์ จะกำหนดสัญลักษณ์ของปริมาณเวกเตอร์ให้มีลูกศรอยู่บนตัวอักษร ดังรูป



(ก) การกระจัด



(ข) แรงกด



(ค) ความเร็วของเครื่องบิน

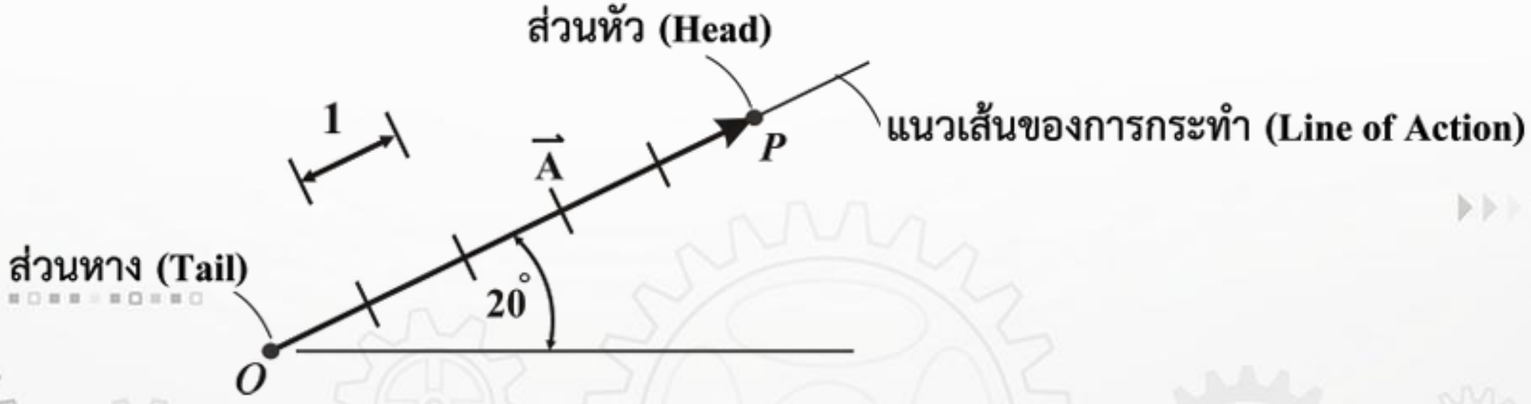
(ง) โมเมนต์รอบจุด A

(จ) น้ำหนักก้อนหิน

3 ความรู้พื้นฐานของเวกเตอร์

3.1 การเขียนเวกเตอร์

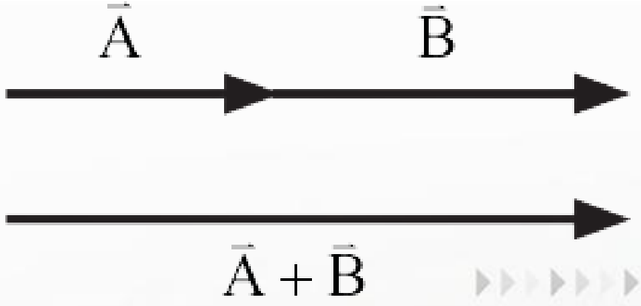
แรงเป็นปริมาณเวกเตอร์ จึงมีทั้งขนาดและทิศทาง รวมทั้งจุดกระทำ เวกเตอร์สามารถเขียนแทนด้วยลูกศร โดยความยาวของลูกศรแสดงถึงขนาดของเวกเตอร์ และหัวลูกศรแสดงทิศทางของเวกเตอร์ โดยที่หางของลูกศรแทนจุดเริ่มต้น และหัวลูกศรเป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์



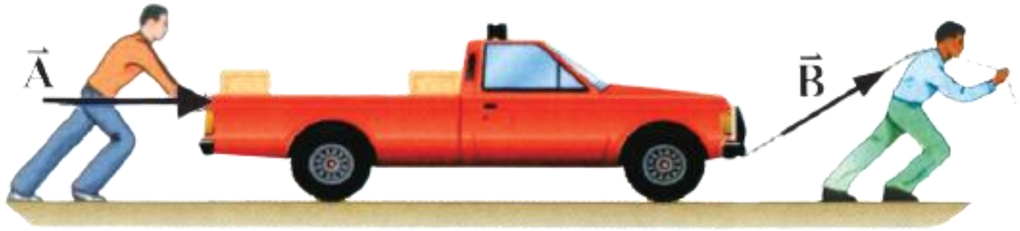
3.2 การบวกเวกเตอร์

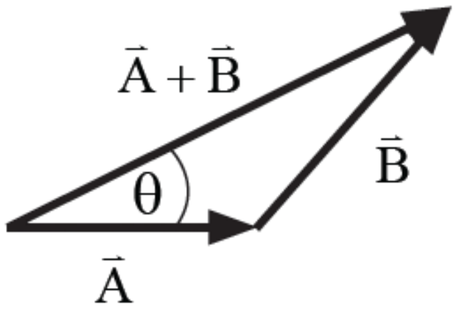
ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง
เมื่อจะนำมาบวก ลบ คูณ หารกันในทางคณิตศาสตร์ จะต้องมีการพิจารณาถึงทิศทางด้วย

1 **เวกเตอร์มีทิศทางในแนวเดียวกัน** สามารถบวกทางพีชคณิตได้



2 เวกเตอร์มีทิศทางไม่อยู่ในแนวเดียวกัน ไม่สามารถบวกเวกเตอร์ทางพีชคณิตได้ ต้องใช้วิธีบวกแบบเวกเตอร์



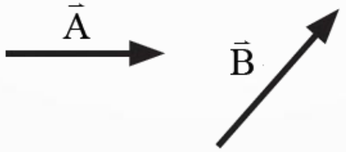


3 สมบัติการบวกเวกเตอร์

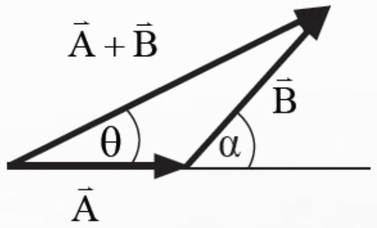
1) การสลับที่เวกเตอร์

$$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$$

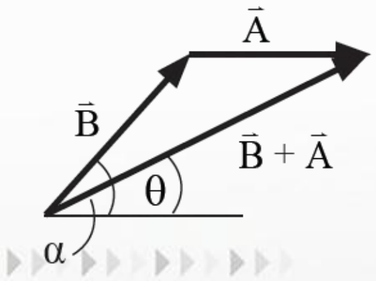
ผลของการบวกจะเท่ากัน



(ก) $\vec{A}$, $\vec{B}$

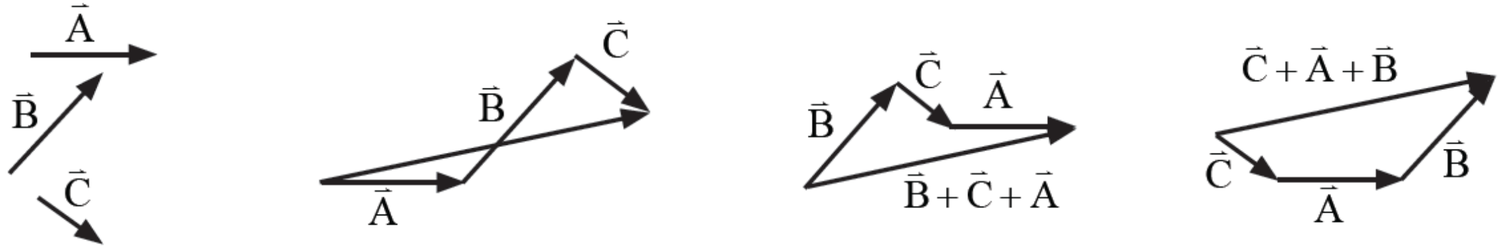


(ข) $\vec{A}+\vec{B}$



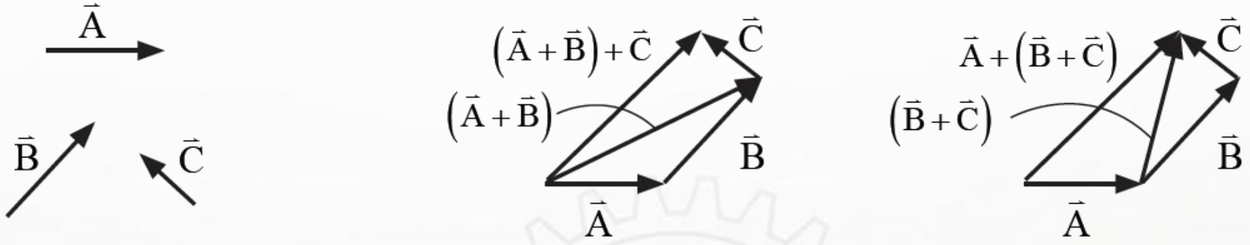
(ค) $\vec{B}+\vec{A}$

ในกรณีมีเวกเตอร์มากกว่า 2 เวกเตอร์ มาบวกกัน ก็สามารถสลับที่กันได้ เช่น $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = \vec{B}+\vec{C}+\vec{A} = \vec{C}+\vec{A}+\vec{B}$



(ก) $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ (ข) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ (ค) $\vec{B}+\vec{C}+\vec{A}$ (ง) $\vec{C}+\vec{A}+\vec{B}$

2) การจัดหมู่เวกเตอร์ 3 เวกเตอร์

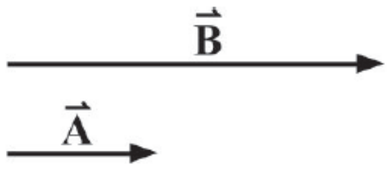


(ก) $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ (ข) $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ (ค) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

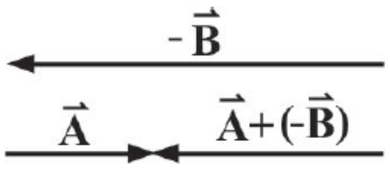
3.3 การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์ใช้หลักการเดียวกับการบวกเวกเตอร์ คือ การทำให้เวกเตอร์ที่จะเอามาลบเป็นเวกเตอร์ติดลบ โดยการกลับทิศทางหัวลูกศรเสียก่อน แล้วจึงนำมาบวกกับเวกเตอร์ที่ต้องการ ดังนี้

1 เวกเตอร์มีทิศทางในแนวเดียวกัน

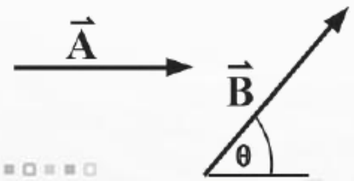


(ก) เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

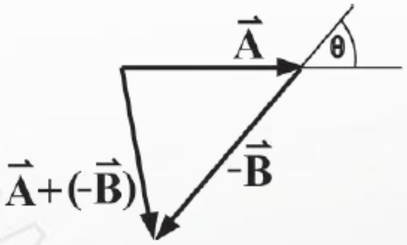


(ข) การลบเวกเตอร์

2 เวกเตอร์มีทิศทางไม่อยู่ในแนวเดียวกัน



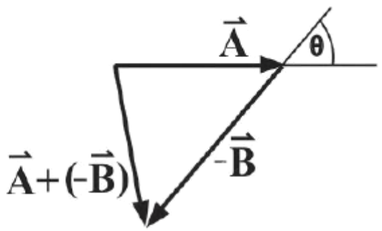
(ก) เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$



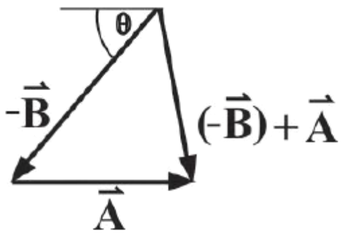
(ข) การลบเวกเตอร์

3 **สมบัติการลบเวกเตอร์** เหมือนกับสมบัติการบวกเวกเตอร์ เพียงแต่เวกเตอร์มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์เดิมเท่านั้น

1) การสลับที่

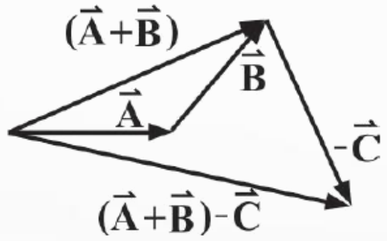


(ก) $\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$

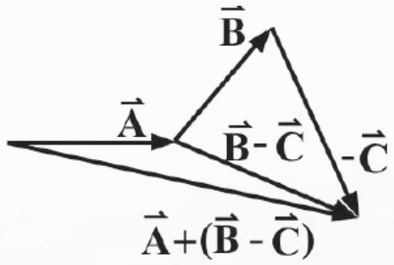


(ข) $\left(-\vec{B}\right)+\vec{A}$

2) การจัดหมู่



(ก) $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)-\vec{C}$

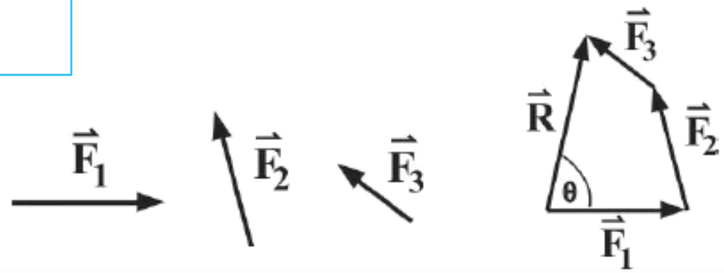


(ข) $\vec{A}+\left(\vec{B}-\vec{C}\right)$

4 การคำนวณหาแรงลัพธ์และทิศทางของแรงลัพธ์

4.1 ความหมายของแรงลัพธ์

แรงที่เกิดจากการรวมแรงย่อยต่าง ๆ โดยใช้สัญลักษณ์ $\sum\vec{R}$ หรือ $\vec{R}$

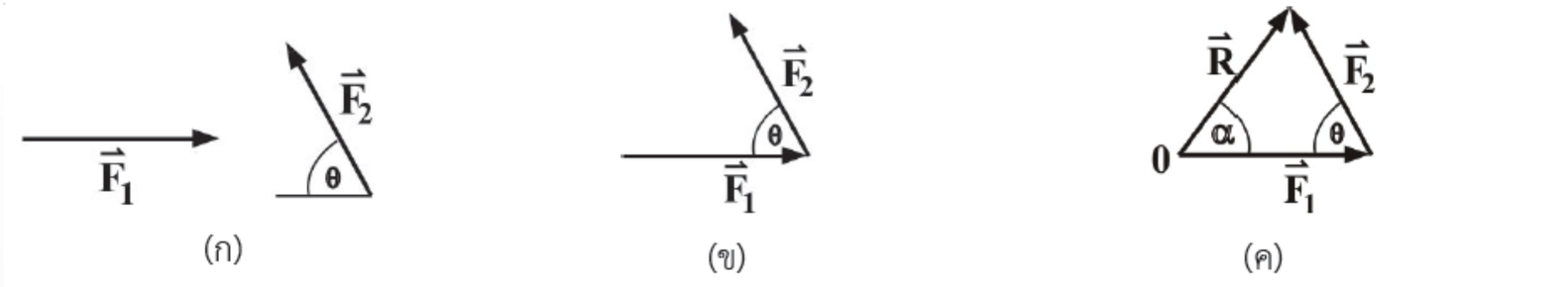


(ก) (ข)

แรงลัพธ์ $(\vec{R})$ ที่เกิดขึ้นเกิดจากการรวมแรง $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ และ $\vec{F}_3$ แบบเวกเตอร์
จากรูปแรงลัพธ์มีขนาดวัดจากส่วนหางของ $\vec{F}_1$ ถึงส่วนหัวของ $\vec{F}_3$
(ข้อสังเกตของแรงลัพธ์ หัวลูกศรชนหัวลูกศรและหางลูกศรชนหางลูกศร)

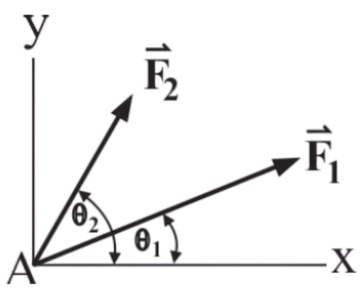
4.2 การคำนวณหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ โดยวิธีเขียนรูป (Graphical Method)

1 **วิธีหางลูกศรต่อหัวลูกศร (Head–to–Tail Method)** วิธีนี้มักจะใช้แก้ปัญหาง่าย ๆ โดยค่าที่ได้จะต้องอาศัยอ่านจากเครื่องมือวัด ไม่ว่าจะมีแรงกี่แรงก็ตาม สามารถเขียนรูปหาแรงลัพธ์ได้เสมอ การเขียนรูปต้องใช้มาตราส่วนความยาวของลูกศรแทนขนาดและมุมแทนทิศทางของแรง

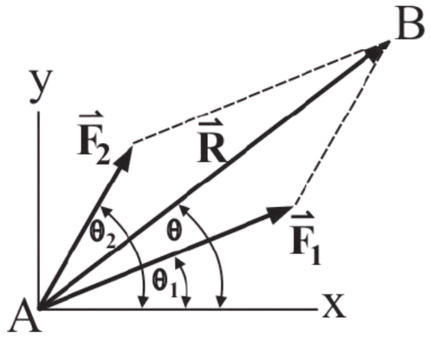


จากรูป ก สามารถหาแรงลัพธ์ $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ โดยนำหางของ $\vec{F}_2$ มาต่อที่หัวของ $\vec{F}_1$ ดังรูป ข เวกเตอร์แรงลัพธ์ $(\vec{R})$ เกิดจากการลากเส้นจากหางของ $\vec{F}_1$ ไปยังหัวของ $\vec{F}_2$ เนื่องจากมี 3 เวกเตอร์จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมปิดดังรูป ค ถ้ามีหลายเวกเตอร์จะเป็นรูปหลายเหลี่ยม

2 วิธีสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelogram Method)



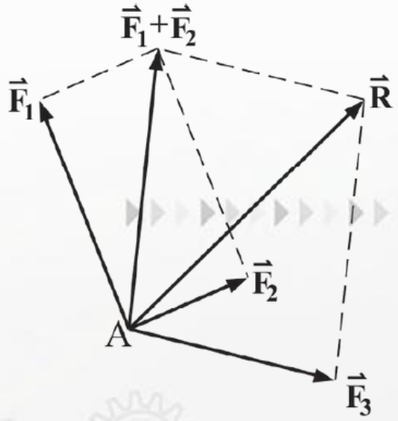
(ก)



(ข)

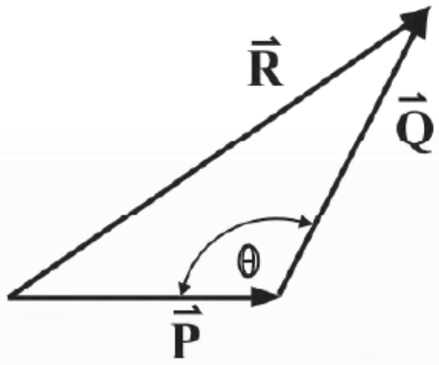
จากหัวของ $\vec{F}_2$ ลากเส้นให้ขนานกับ $\vec{F}_1$ และลากเส้นอีกเส้นจากหัวของ $\vec{F}_1$ ให้ขนานกับ $\vec{F}_2$ ไปทางจุด B จะได้จุดตัดของเส้นทั้งสองที่จุด B แล้วลากเส้นทแยงมุมจากจุด A ไปยังจุด B จะได้ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ ดังรูป ข

ถ้ามีแรงย่อยหลายแรงก็สามารถเขียนแรงรวมกันได้ แต่ต้องใช้แรงย่อยทีละคู่ จากรูป แรง $\vec{F}_1$ รวมกับแรง $\vec{F}_2$ จะได้แรง $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ เมื่อไปรวมกับ $\vec{F}_3$ จะได้ $\vec{R}$

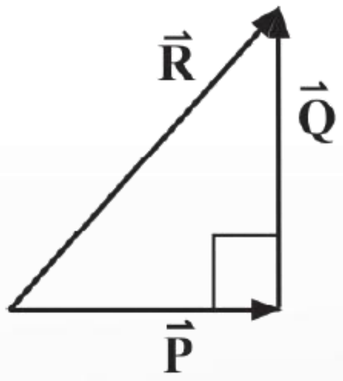


4.3 การคำนวณหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ โดยการแตกแรง

การแตกแรง คือ การจำแนกแรงให้เป็นแรงย่อยได้หลายแรง และหลายทิศทาง แต่ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะการแตกแรงออกเป็นแรงย่อย 2 แรงเท่านั้น (2 มิติ)

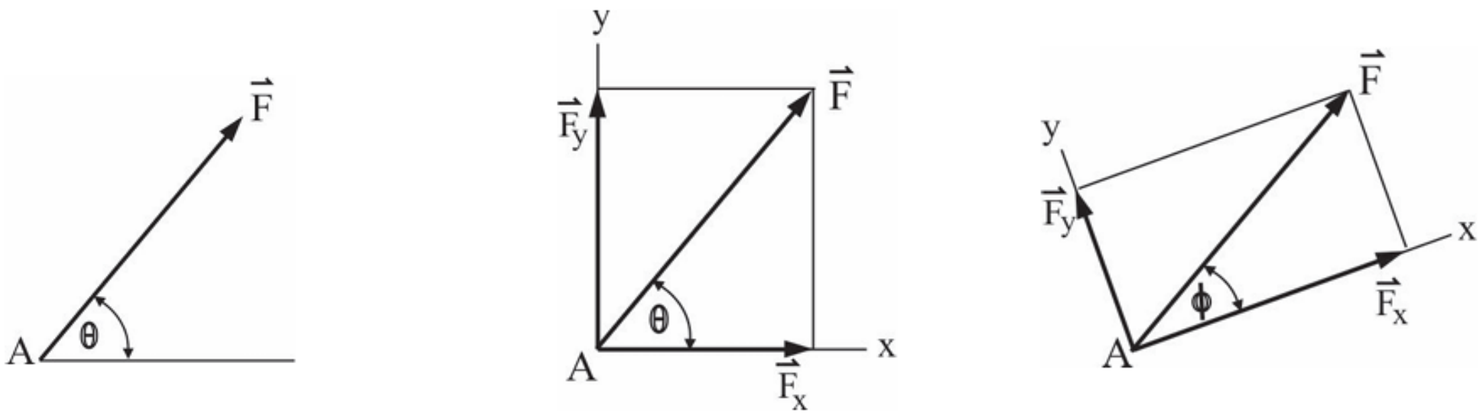


(ก) แรง $\vec{R}$ มีแรง $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ เป็นแรงย่อย



(ข) แรง $\vec{R}$ มีแรง $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ เป็นแรงย่อย

1 การแตกแรงเป็นแรงย่อยตั้งฉากกัน



(ก) (ข) (ค)

จากรูป ก จะแตกแรง $\vec{F}$ ไปตามแกนอ้างอิง x–y ที่กำหนด หรือพิกัดฉาก x–y ดังรูป ข ซึ่งแกนอ้างอิงสามารถกำหนดตามเอียงในแนวใดก็ได้ตามความเหมาะสม ดังรูป ค แรงย่อยที่ตั้งฉากกันจะได้คือ

$\vec{F}_x$ คือ แรงย่อยของแรง $\vec{F}$ ในแกน x

$\vec{F}_y$ คือ แรงย่อยของแรง $\vec{F}$ ในแกน y

2 การหาแรงย่อย เมื่อบอกมุมระหว่างแรงที่กระทำกับแกน

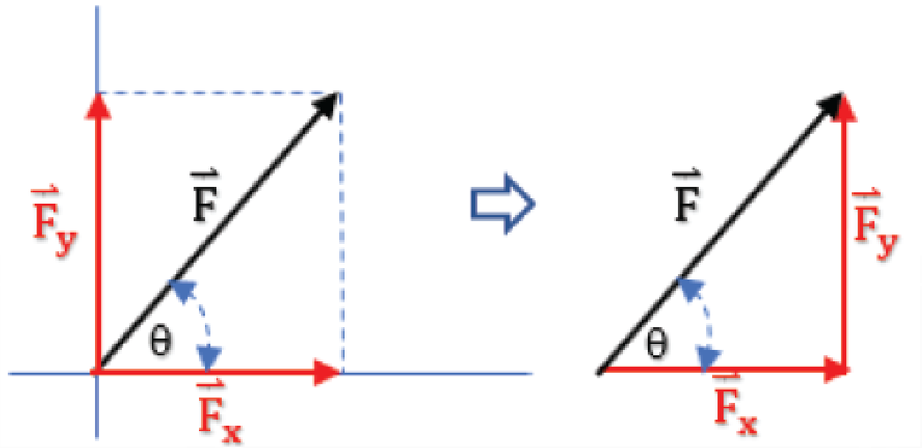
1) ทำมุมกับแกน x ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาความสัมพันธ์ของแรงย่อย ได้ดังนี้

$$\cos\theta = \frac{\vec{F}_x}{\vec{F}}$$

$$\vec{F}_x = \vec{F}\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\vec{F}_y}{\vec{F}}$$

$$\vec{F}_y = \vec{F}\sin\theta$$



2 การหาแรงย่อย เมื่อบอกมุมระหว่างแรงที่กระทำกับแกน

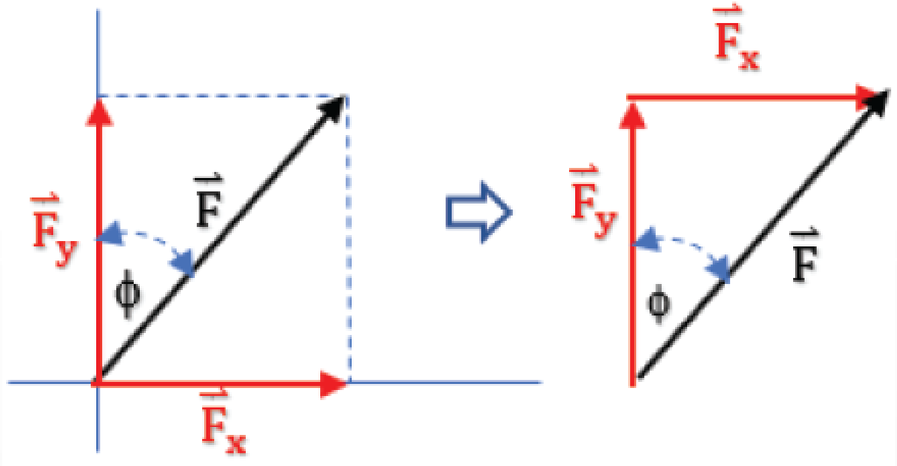
2) ทำมุมกับแกน y ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาความสัมพันธ์ของแรงย่อย ได้ดังนี้

$$\cos\phi = \frac{\vec{F}_y}{\vec{F}}$$

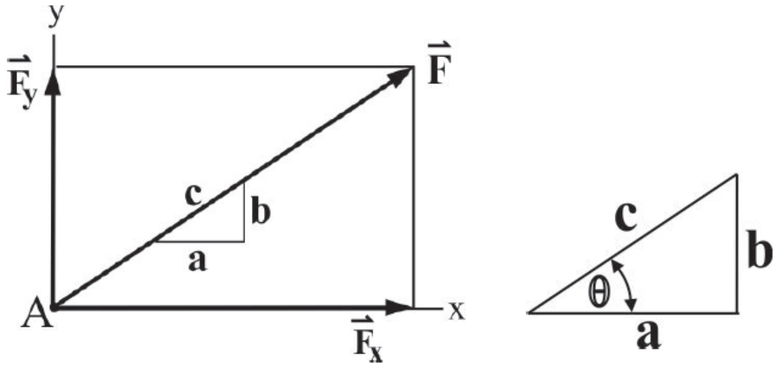
$$\vec{F}_y = \vec{F}\cos\phi$$

$$\sin\phi = \frac{\vec{F}_x}{\vec{F}}$$

$$\vec{F}_x = \vec{F}\sin\phi$$



3 การหาแรงย่อยเมื่อบอกมุมระหว่างแรงที่กระทำกับแนวแกนเป็นด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก



(ก) (ข)

จากรูป แรง $\vec{F}$ ไม่กำหนดมุมเป็นองศา แต่บอกเป็นด้านสามเหลี่ยมมุมฉากมาแทน การแตกแรงจึงต้องกำหนดสมมติมุม θ ทำกับแนวแกน x ขึ้นดังรูป ข แล้วจึงใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติจะได้ดังนี้

$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

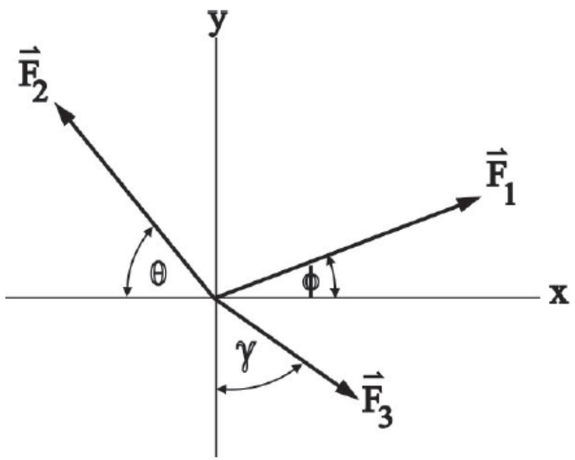
$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

ดังนั้น การแตกแรง $\vec{F}$ ที่ไม่บอกมุมมาจึงใช้อัตราส่วนของฟังก์ชันตรีโกณรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ คือ

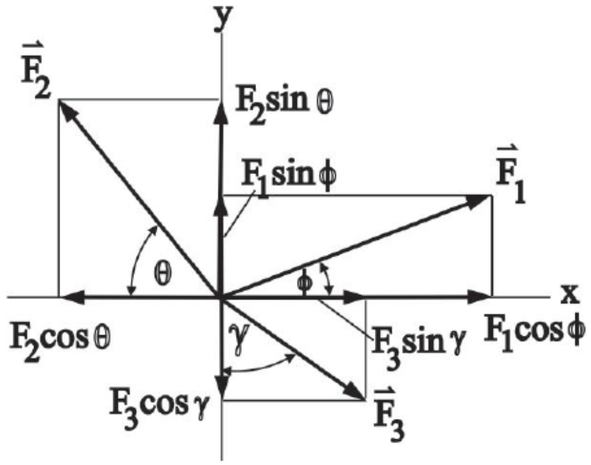
จาก $\vec{F}_x = \vec{F}\cos\theta = \vec{F}\left(\frac{a}{c}\right)$ และ $\vec{F}_y = \vec{F}\sin\theta = \vec{F}\left(\frac{b}{c}\right)$

4 การหาแรงย่อยเมื่อมีแรงกระทำร่วมกันหลายแรง

1) การแตกแรงจะต้องใช้แกนอ้างอิงเดียวกัน และใช้วิธีการแตกแรงเป็นแรงย่อยเหมือนกัน เมื่อมีแรงกระทำแรงเดียว

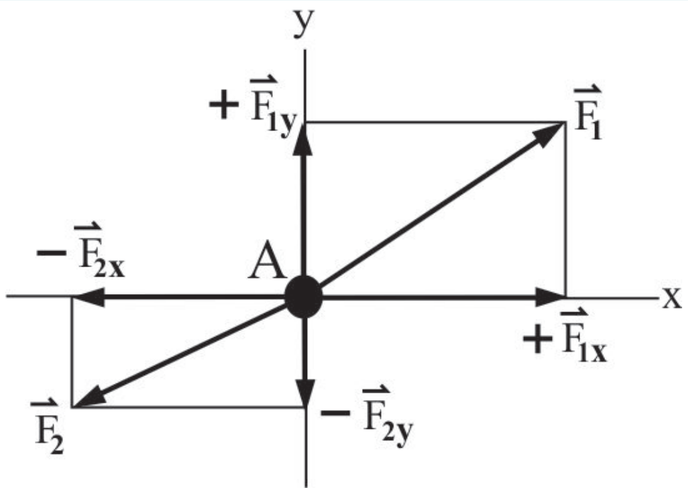


(ก)

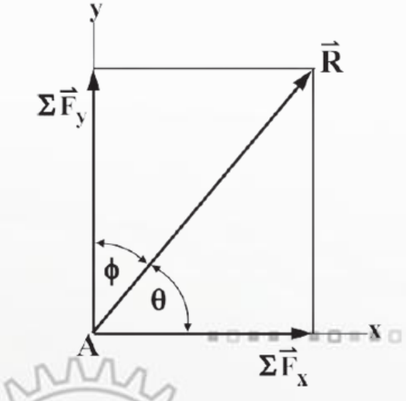


(ข)

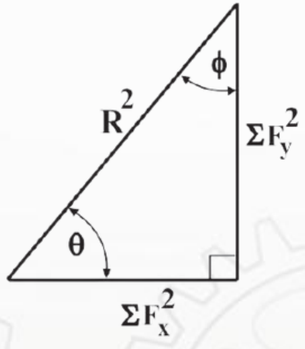
2) การกำหนดเครื่องหมายในการรวมแรง แรงย่อยตามแนวแกน x มีค่าเป็นบวกเมื่อแรงชี้ไปทางขวา ส่วนแรงย่อยในแนวแกน y มีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศชี้ขึ้น เช่น $\vec{F}_{1x}$ มีทิศชี้ไปทางขวา มีค่าเป็นบวก และ $\vec{F}_{1y}$ ที่มีทิศชี้ขึ้น มีค่าเป็นบวก ส่วน $\vec{F}_{2x}$ และ $\vec{F}_{2y}$ มีทิศทางไปตรงข้าม มีค่าเป็นลบดังรูปที่



3) การคำนวณหาขนาดของแรงลัพธ์ โดยใช้ทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras)



(ก)



(ข)

$$\vec{R}^2 = \sum \vec{F}_x^2 + \sum \vec{F}_y^2$$

$$\vec{R} = \sqrt{\sum \vec{F}_x^2 + \sum \vec{F}_y^2}$$

เมื่อ $\sum \vec{F}_x$ คือ ผลรวมของขนาดแรงย่อยในแนวแกน x

$\sum \vec{F}_y$ คือ ผลรวมของขนาดแรงย่อยในแนวแกน y

4) การคำนวณหาทิศทางของแรงลัพธ์

การหาทิศทางของแรงลัพธ์สามารถใช้ฟังก์ชันตรีโกณจากสามเหลี่ยมแทนแรง

$$\cos\theta = \frac{\sum \vec{F}_x}{\vec{R}} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sum \vec{F}_x}{\vec{R}}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{\sum \vec{F}_y}{\vec{R}} \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sum \vec{F}_y}{\vec{R}}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{\sum \vec{F}_y}{\sum \vec{F}_x} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sum \vec{F}_y}{\sum \vec{F}_x}\right)$$

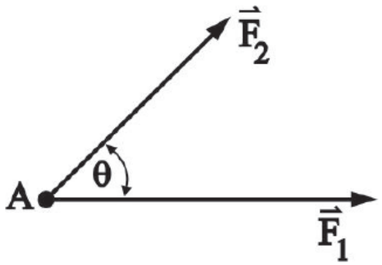
ซึ่งค่ามุม θ ที่ได้จากทั้งสามสมการมีค่าเท่ากัน

สรุป การหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์โดยการแตกแรงมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

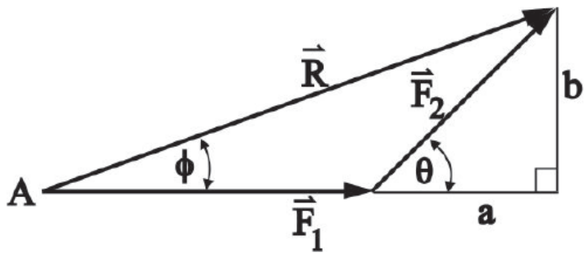
- ตั้งแกนอ้างอิง (x, y) และแตกแรงแต่ละแรงออกเป็นแรงย่อยไปที่แกนอ้างอิงจนครบทุกแรง
- หาผลรวมขนาดของแรงในแต่ละแกนอ้างอิง จะได้ค่า $\sum \vec{F}_x, \sum \vec{F}_y$
- หาขนาดแรงลัพธ์โดยใช้สมการ $\vec{R} = \sqrt{\sum \vec{F}_x^2 + \sum \vec{F}_y^2}$
- หาทิศทางโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4.4 การคำนวณหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์โดยใช้กฎโคไซน์ (Law of Cosines)

1 การคำนวณหาขนาดโดยใช้กฎโคไซน์



(ก)



(ข)

จะได้ $\vec{R}^2 = (\vec{F}_1 + a)^2 + b^2$

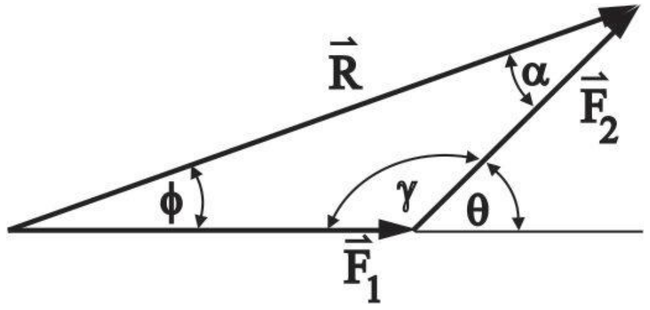
$= \vec{F}_1^2 + 2\vec{F}_1 a + a^2 + b^2$

$\vec{R}^2 = \vec{F}_1^2 + 2\vec{F}_1 a + \vec{F}_2^2$

เมื่อ $a = \vec{F}_2 \cos\theta$ นำ a ไปแทนค่าในสมการ จะได้สมการ $\vec{R}^2 = \vec{F}_1^2 + 2\vec{F}_1\vec{F}_2 \cos\theta + \vec{F}_2^2$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ $\vec{R}^2 = \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + 2\vec{F}_1\vec{F}_2 \cos\theta$

จากรูป ข เมื่อนำมาเขียนเป็นสามเหลี่ยมแทนแรง จะได้สามเหลี่ยมปิดดังรูป



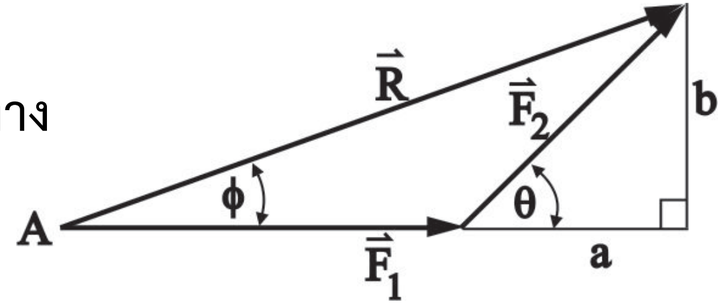
จากรูป มุม θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{F}_1$ กับ $\vec{F}_2$ เมื่อต้องการหา $\vec{R}$ มุมที่อยู่ตรงข้ามมุม θ คือ มุม γ ค่าของมุม γ ได้จาก 180 - θ ดังนั้น cos(180 - θ) จะได้ค่าติดลบ (-) สามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ได้ คือ

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}^2 &= \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 - 2\vec{F}_1\vec{F}_2\cos\gamma \\ \vec{F}_1^2 &= \vec{R}^2 + \vec{F}_2^2 - 2\vec{R}\vec{F}_2\cos\alpha \\ \vec{F}_2^2 &= \vec{R}^2 + \vec{F}_1^2 - 2\vec{R}\vec{F}_1\cos\phi \end{aligned}\right\}$$

สมการทั้งสามนี้มีชื่อเรียกร่วมกันว่า **กฎของโคไซน์**

2 การหาทิศทางของแรงลัพธ์

การหาทิศทางของแรงลัพธ์มักจะเทียบกับแรงใดแรงหนึ่ง หรือเทียบกับแกนอ้างอิงในที่นี้จากรูป แรงลัพธ์ $\vec{R}$ ทำมุม ϕ กับแรง $\vec{F}_1$ การบอกทิศทางของแรงลัพธ์ $\vec{R}$ ก็คือการหาค่ามุม ϕ ซึ่งหาได้จากสมการ



$$\tan\phi = \frac{b}{\vec{F}_1 + a}$$

$$= \frac{\vec{F}_2 \sin\theta}{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \cos\theta}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\vec{F}_2 \sin\theta}{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \cos\theta}\right)$$

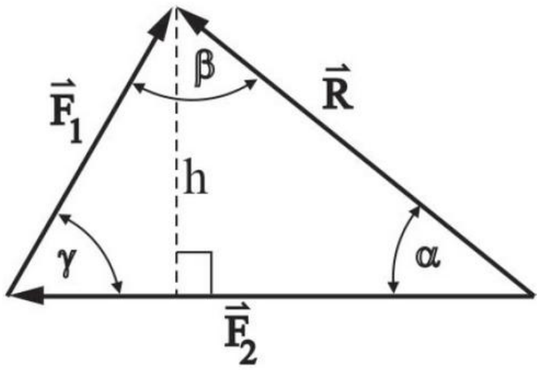
4.5 การคำนวณหาแรงลัพธ์โดยใช้กฎของไซน์ (Law of Sines)

พิจารณารูปสามเหลี่ยมปิด ลากเส้นสูง h ให้ตั้งฉาก $\vec{F}_2$

จากรูป จะได้ว่า $\sin\alpha = \dfrac{h}{\vec{R}}$ หรือ $h = \vec{R}\sin\alpha$

$\sin\gamma = \dfrac{h}{\vec{F}_1}$ หรือ $h = \vec{F}_1\sin\gamma$

ดังนั้น $\vec{R}\sin\alpha = \vec{F}_1\sin\gamma$



หารทั้งสองข้างด้วย $\sin\alpha$ $\sin\gamma$ จะได้ $\dfrac{\vec{R}}{\sin\gamma} = \dfrac{\vec{F}_1}{\sin\alpha}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\dfrac{\vec{F}_1}{\sin\alpha} = \dfrac{\vec{F}_2}{\sin\beta}$

รวมสมการเข้าด้วยกันจะได้กฎของไซน์ ดังนี้

$$\frac{\vec{R}}{\sin\gamma} = \frac{\vec{F}_1}{\sin\alpha} = \frac{\vec{F}_2}{\sin\beta}$$